Jozef Kúdelčík – Peter Hockicko

ZÁKLADY FYZIKY

Vydala Žilinská univerzita v Žiline
2011

Táto vysokoškolská učebnica vznikla v rámci riešenia projektu KEGA 075-008ŽU-4/2010 Rozvoj kľúčových kompetencií študentov vysokých škôl technických odborov vo fyzikálnom vzdelávaní.

Vedecký redaktor: prof. RNDr. Peter Bury, CSc.

Recenzenti: doc. RNDr. Vladimír Bahýľ, CSc.
doc. RNDr. Anna Zahoranová, PhD.

Vydala Žilinská univerzita v Žiline / EDIS - vydavateľstvo ŽU

ISBN 978-80-554-0341-0

Obsah

Úvod **9**

1 Fyzikálne veličiny a jednotky **11**

1.1 Fyzikálna veličina 11

1.2 Medzinárodná sústava jednotiek SI 12

2 Základy vektorového počtu **21**

2.1 Skalárne a vektorové fyzikálne veličiny 21

2.2 Operácie s vektormi 22

3 Kinematika hmotného bodu **29**

3.1 Hmotný bod, vzťažná sústava, trajektória, dráha pohybu 29

3.2 Priamočiary pohyb 33

3.2.1 Rýchlosť a dráha priamočiareho pohybu 35

3.2.2 Zrýchlenie priamočiareho pohybu 39

3.2.3 Rovnomerne zrýchlený pohyb 40

3.3 Trojrozmerný pohyb 45

3.4 Krivočiary pohyb, pohyb po kružnici 49

3.4.1 Vzťah obvodovej a uhlovej rýchlosti 56

3.4.2 Perióda a frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici . 57

3.4.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie 58

4 Dynamika hmotného bodu **61**

4.1 Newtonove pohybové zákony, impulz sily, moment sily 63

4.2 Práca, výkon a energia 68
4.2.1 Práca 68
4.2.2 Výkon 71
4.2.3 Energia 72
4.3 Zákony zachovania energie 74

5 Trecie sily **79**
5.1 Šmykové trenie 79
5.2 Valivé trenie 84

6 Gravitačné pole **89**
6.1 Keplerove zákony 89
6.2 Newtonov gravitačný zákon 91
6.3 Intenzita gravitačného poľa 92
6.4 Potenciál gravitačného poľa 93
6.5 Vzťah intenzity a potenciálu gravitačného poľa 95
6.6 Gravitácia v okolí Zeme 96
6.7 Pohyby v tiažovom poli Zeme 97
6.7.1 Voľný pád 98
6.7.2 Vrh zvislý nahor 99
6.7.3 Vodorovný vrh 100
6.7.4 Šikmý vrh 100
6.8 Kozmické rýchlosti 101

7 Mechanika tuhého telesa **105**
7.1 Ťažisko 106
7.2 Ťažisko sústavy bodov 107
7.3 Tuhé teleso 108
7.4 Ťažisko tuhého telesa 109
7.5 Rýchlosť a zrýchlenie ťažiska 110
7.6 Impulzové vety 111

7.7 Kinetická energia tuhého telesa 114
7.7.1 Translačný pohyb tuhého telesa 114
7.7.2 Rotačný pohyb tuhého telesa okolo osi 114
7.8 Moment zotrvačnosti 116
7.8.1 Steinerova veta 117
7.9 Pohybová rovnica telesa pri otáčaní okolo osi 117
7.9.1 Fyzikálne kyvadlo 120
7.9.2 Matematické kyvadlo 121
7.9.3 Torzné kyvadlo 121
7.10 Pohyb valca po naklonenej rovine 123

8 Mechanické vlastnosti tuhých látok 127
8.1 Hookov zákon a krivka deformácie 128
8.2 Deformácia všestranným kolmým tlakom 132
8.3 Deformácia šmykom 134
8.4 Deformácia krútením 135

9 Mechanika kvapalín 137
9.1 Tlak v kvapalinách a plynoch 137
9.1.1 Pascalov zákon 138
9.1.2 Hydrostatický tlak 139
9.1.3 Atmosférický tlak 139
9.2 Archimedov zákon 140
9.3 Základné pojmy hydrodynamiky 141
9.4 Rovnica spojitosti toku 141
9.5 Bernoulliho rovnica 142
9.6 Použitie Bernoulliho rovnice 144
9.7 Prúdenie reálnej kvapaliny 145
9.8 Obtekanie telies 146

10 Kmitanie **149**

10.1 Harmonický pohyb 149

10.1.1 Kinematika a dynamika kmitavého pohybu 150

10.1.2 Premeny energie v mechanickom oscilátore 158

10.2 Tlmený harmonický oscilátor a tlmené kmitanie 159

10.3 Vynútený kmitavý pohyb 164

10.4 Skladanie kmitov 166

11 Základy termiky a termodynamika **171**

11.1 Tepelný pohyb v látkach 171

11.2 Teplota a jej meranie 173

11.3 Teplotná rozťažnosť látok 175

11.4 Teplo, tepelná kapacita 176

11.5 Kalorimetrická rovnica 178

11.6 Zmeny skupenstva látky 179

11.7 Ideálny plyn a stavová rovnica 181

11.8 Termodynamické veličiny a zákony 184

11.9 Tepelné deje v ideálnom plyne 187

12 Elektrostatické pole vo vákuu **193**

12.1 Charakteristiky elektrického náboja 193

12.2 Coulombov zákon 195

12.3 Intenzita elektrostatického poľa 196

12.4 Tok intenzity elektrostatického poľa. Gaussova veta. 198

12.5 Práca a potenciál elektrostatického poľa 202

12.6 Vzťah intenzity a potenciálu elektrostatického poľa 204

12.7 Elektrické napätie 204

12.8 Elektrický dipól 205

12.9 Pohyb nabitej častice v elektrickom poli 206

12.10 Elektrostatická indukcia 207

12.11 Kapacita vodiča a kondenzátora 209

12.12 Kapacita doskového kondenzátora 209
12.13 Spájanie kondenzátorov 210
12.14 Energia elektrostatického poľa 211

13 Elektrostatické javy v dielektrikách 213
13.1 Polarizácia dielektrika 213
13.2 Elektrické pole v dielektriku 216
13.3 Vektor elektrickej indukcie a energia elektrického poľa 217

14 Elektrický prúd 219
14.1 Hustota elektrického prúdu 221
14.2 Ohmov zákon 222
14.3 Kirchhoffove zákony 223
14.4 Spájanie elektrických odporov 227
14.5 Teplotná závislosť elektrického odporu 228
14.6 Zdroje elektromotorického napätia 228
14.7 Práca a výkon prúdu 230

15 Magnetické pole 232
15.1 Magnetické pole 232
15.2 Magnetická indukcia 234
15.2.1 Lorentzova sila 234
15.2.2 Pohyb náboja v magnetickom poli 235
15.2.3 Ampérova sila 236
15.2.4 Magnetický moment prúdového závitu 238
15.3 Biotov-Savartov-Laplaceov zákon 239
15.4 Ampérov zákon - zákon celkového prúdu 240
15.5 Sila medzi dvomi rovnobežnými vodičmi, definícia ampéra . . . 243
15.6 Látky v magnetickom poli 244
15.7 Magnetická polarizácia 246
15.8 Mikroskopická teória magnetických látok 247

16 Elektromagnetická indukcia **251**
16.1 Magnetický indukčný tok 252
16.2 Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie 253
16.3 Lenzov zákon 253
16.4 Vlastná a vzájomná indukcia 255
16.5 Energia magnetického poľa 256

17 Optika **259**
17.1 Základné zákony geometrickej optiky 261
17.2 Optické zobrazovanie 262
17.3 Zobrazovanie rovinným zrkadlom 264
17.4 Zobrazovanie pomocou guľovej plochy 265
17.5 Zobrazovanie pomocou šošoviek 266
17.6 Základné optické prístroje 268

Literatúra **271**

Register **274**

Úvod

"Everything should be made as simple as possible.
But not simpler!"
Albert Einstein

Za základ fyziky môžeme považovať meranie, ktoré je teoreticky zdôvodnené alebo v obrátenom poradí teoretickú fyzikálnu analýzu, ktorá je potvrdená experimentálnymi výsledkami. Predmetom štúdia fyziky je hmota, energia a ich vzájomná interakcia v priestore a čase. Na začiatku rozvoja fyziky jej bolo vymedzené skúmanie pohybu neživej prírody, pod ktorým sa rozumelo hlavne hľadanie zákonitostí pohybu častíc a telies, čo dnes spadá pod mechaniku. Po objavení gravitačného zákona, elektrických a magnetických javov sa do fyziky dostala oblasť, ktorej dnes hovoríme fyzika polí. Jej predmetom bolo skúmanie interakcie medzi poľami a časticami, vlastnosti rozličných polí, ich vzájomné interakcie. V 20. storočí sa s rozvojom nových výskumných metód rozvíja kvantová a štatistická fyzika s termodynamikou. Možno teda konštatovať, že vývoj predmetu fyziky sa dostáva od situácie, kedy fyzika bola jedinou vedou o prírode, k situácii, kedy bude prostriedkom, pomocou ktorého sa zintegrujú všetky prírodné vedy.

Tradičné a v súčasnosti často používané stanovisko vedie k rozdeleniu fyziky na mechaniku, termiku a termodynamiku, elektrinu a magnetizmus, optiku, teóriu relativity, atomistiku a kvantovú fyziku. Predmetom štúdia tejto učebnice je časť fyziky, ktorej delenie rešpektuje istú filozofickú hierarchiu problematiky: hmota, jej prejavy, pohyb a jeho formy atď. Obsahovo je učebnica členená do sedemnástich kapitol.

Úvodné dve sa zaoberajú definíciou fyzikálnej veličiny, systémom jednotiek a základmi vektorového počtu, 3. a 4. kapitola je mechanikou hmotného bodu rozdelená na kinematiku s dôsledným popisom základných druhov pohybov a dynamiku rozoberajúcu príčiny vzniku pohybu. 5. kapitola sa zaoberá trecími silami. V 6. kapitole sú základné zákony gravitačného poľa s riešením pohybov v gravitačnom poli Zeme a Slnka. V 7. kapitole sú základy dynamiky sústavy hmotných bodov a tuhého telesa. V ďalších kapitolách sú postupne predstavené tuhé látky, kvapaliny, plyny a ich základné fyzikálne vlastnosti, kmitanie a termika. V 12. – 14. kapitole je najprv charakterizované elektrické pole so zodpovedajúcimi veličinami vo vákuu, potom v dielektrickom prostredí

a ďalej sa venujeme elektrickému prúdu. V 15. kapitole sa dozvieme základné charakteristiky magnetického poľa, v 16. kapitole sú popísané javy elektromagnetickej indukcie a v poslednej 17. kapitole sa venujeme základom zobrazovania. Literatúra uvedená v závere učebnice predstavuje nielen literatúru, z ktorej bolo čerpané pri zostavovaní učebnice, ale aj literatúru odporúčanú na hlbšie štúdium.

Čitateľ sa má možnosť oboznámiť s poznatkami, ktoré boli sformulované za čias Newtona, Coulomba, Pascala či Galileiho (približne pred $300 - 400$ rokmi) ale aj za čias Archimeda (približne pred 2300 rokmi). Tieto historické skutočnosti však nič nemenia na tom, že ich poznatky sú aj dnes potrebné pre skúmanie ďalších moderných, úzko špecializovaných odborov, ktoré tiež súvisia s hmotou, energiou a ich vzájomnými interakciami.

Táto učebnica je určená hlavne pre študentov bakalárskych a inžinierskych študijných programov s jednosemestrálnym základným kurzom fyziky na Žilinskej univerzite (so zameraním hlavne na študentov fakúlt PEDaS, SvF, FŠI), ale aj pre všetkých, ktorí majú záujem o štúdium tejto vedy.

Podiel autorov na učebnici je nasledujúci: 1. až 5., 8. a 10. kapitola PaedDr. Peter Hockicko, PhD.; 6., 7., 9., 11. až 17. kapitola RNDr. Jozef Kúdelčík, PhD.

Radi by sme sa poďakovali odborným recenzentom doc. RNDr. Vladimírovi Bahýľovi, CSc., doc. RNDr. Anne Zahoranovej, PhD. a vedeckému redaktorovi prof. RNDr. Petrovi Burymu, CSc. za pozorné prečítanie rukopisu a cenné pripomienky, ktoré prispeli ku skvalitneniu učebnice. Naše poďakovanie patrí aj Douglasovi Brownovi - autorovi programu Tracker (Video Analysis and Modeling Tools) vytvorenému vďaka projektu Open Source Physics. Pomocou tohto programu boli analyzované videá a vytvorené niektoré z obrázkov použité v tejto publikácii. Taktiež sa chceme poďakovať našim manželkám za trpezlivosť a podporu pri zostavovaní tohto diela.

Autori

1 Fyzikálne veličiny a jednotky

Fyziku možno považovať za vedu, ktorá je zložená z dvoch súčastí - teoretickej a experimentálnej. Taktiež aj fyzikov možno rozdeliť do týchto dvoch skupín. Zatiaľ čo prvá skupina hľadá všeobecne platné pravidlá a zákony, druhá študuje prírodu experimentálnymi pozorovaniami. To, čo sa zistí experimentálne, teoretická fyzika sa snaží zovšeobecniť a popísať matematickými vzťahmi a opačne, čo teoretickí fyzici popíšu rovnicami, to sa snažia ich kolegovia potvrdiť experimentmi. Spoločným jazykom obidvoch skupín je prepracovaný systém jednotiek a fyzikálnych veličín a matematický aparát fyziky.

Fyzika, ako každá iná veda, používa jazyk, prostredníctvom ktorého môže čitateľom sprostredkovať poznatky. Aby sme mu rozumeli, je potrebné hneď v úvode oboznámiť sa s veličinami, ich jednotkami a ďalšími základnými pojmami.

1.1 Fyzikálna veličina

Väčšina pojmov, ktoré tvoria fyzikálny jazyk, sa získala zo skúseností. Dané sú historickým vývojom. Vo fyzike narábame hlavne s pojmami, ktoré vieme aj kvantitatívne vyjadriť. Aby sme dokázali charakterizovať výsledky meraní, prípadne daný fyzikálny jav, sústavu alebo samotný objekt v nej, boli zavedené **fyzikálne veličiny**, napríklad dĺžka, hmotnosť, čas, teplota, tlak atď. Niektoré fyzikálne veličiny majú povahu "množstva" (napr. teplo), iné povahu "stavu" (napr. teplota). Teplo predstavuje určité kvantum vnútornej energie, avšak teplota charakterizuje stav látky vzhľadom na množstvo vnútornej energie.

Aby sme mohli fyzikálne veličiny popísať, boli zavedené najprv **jednotky**. Jednotka predstavuje takú mieru veličiny, ktorej prisúdime presne číselnú hodnotu $1,0$. Alebo inak, **číselná hodnota** (veľkosť) fyzikálnej veličiny uvádza,

koľkokrát sa daná jednotka nachádza v meranej veličine. **Hodnotu fyzikálnej veličiny** X možno vždy vyjadriť súčinom číselnej hodnoty $\{X\}$ a príslušnej meracej jednotky $[X]$, čo zapisujeme v tvare:

$$X = \{X\}[X] \qquad (\text{napr.} \quad t = 23\ s). \tag{1.1}$$

Hodnota nameranej fyzikálnej veličiny nás informuje o výsledku merania, pričom jednotka vyjadruje súvis fyzikálneho množstva s číselným údajom. Keď v rozmerovej rovnici napíšeme pre veličiny aj ich jednotky, dostaneme zároveň jednotku novodefinovanej veličiny. Napríklad zo vzťahu pre prácu (W) za istých podmienok platí $W = F.s$, kde F je sila a s je dráha. Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že jednotka práce je $1[W] = 1[F].1[s]$, t. j. v konkrétnom prípade newton . meter ($N \cdot m$). Pre zjednodušenie sa dôležitým jednotkám, ktoré sú vyjadrené kombináciou iných jednotiek dávajú nové názvy (v uvedenom prípade newton . meter = joule ($N \cdot m = J$)).

Ukazuje sa, že niektoré fyzikálne veličiny sú dôležitejšie ako iné, keďže sa častejšie objavujú v odvodených vzťahoch. Aby bola nezameniteľná interpretácia o meraní fyzikálnej veličiny, bol vytvorený unifikovaný jednotkový systém, pričom niektoré jednotky boli prijaté ako záväzné na meranie fyzikálnych veličín (hlavné jednotky), ďalšie sa stanovili ako odvodené a niektoré ako dovolené pre používanie.

1.2 Medzinárodná sústava jednotiek SI

Jednotky fyzikálnych veličín a ich štandardy bolo možné definovať ľubovoľným spôsobom. Dôležité však bolo, aby bola definícia praktická, rozumná, a aby mohla byť v odborných kruhoch všeobecne prijatá. Keďže v minulosti bolo veľké množstvo fyzikálnych veličín, bolo po medzinárodnej dohode vybraných niekoľko, pre ktoré boli definované ich vlastné štandardy. Ostatné fyzikálne veličiny boli potom odvádzané pomocou týchto základných veličín a ich štandardov. Štandardy základných veličín musia byť dostupné a pri opakovaných meraniach nemenné.

Prvé písomné zmienky o mierach na území dnešného Slovenska pochádzajú z 13. storočia. Miery neboli dlho zjednotené a unifikačné snahy trvali niekoľko storočí. Takmer každá jednotka sa počas svojej existencie niekoľkokrát zmenila. Taktiež sa stávalo, že tie isté jednotky neboli v každej oblasti rovnaké (napr. lakeť bol definovaný ako 2 stopy a 4 palce ($= 73,75\,cm$) a viedenský lakeť ako

77, 7 cm; rakúska míľa = 7, 5859 km, uhorská míľa = 8, 3536 km; bratislavská merica = 54, 2976 litra (do roku 1551), 62, 3925 litra po roku 1551, viedenská merica = 61, 4868 litra, vlastná merica predstavovala 53, 332554 litra; siaha = 6 stôp = 1, 8964838 metra, kráľovská siaha = 1, 80 m (do 14. storočia), 2, 125 m v 15. storočí, viedenská siaha = 1, 896484 metra). Preto bolo potrebné zjednotiť systém mier.

Prvý metrický systém bol navrhnutý v roku 1790 počas Veľkej francúzskej revolúcie. V roku 1795 Francúzske národné zhromaždenie prijalo jednotku dĺžky - meter a jednotku hmotnosti - gram ako praktické miery prospešné pre priemysel a obchod. Medzinárodná normalizácia začala v roku 1870 poradou zástupcov 15 štátov v Paríži.

Snahou vedcov bolo zjednodušiť svoje merania, výpočty, komunikáciu medzi kolegami po celom svete. Existovali dva základné smery, aký systém zaviesť, pre malé jednotky (centimetre, gramy) a väčšie jednotky (metre, kilogramy). Tak vznikli dva metrické systémy: **CGS** (centimeter, gram, sekunda), ktorý bol formálne zavedený Britskou asociáciou pokroku vo vede (*The British Association for the Advancement of Science*) v roku 1874 a systém **MKS** (meter, kilogram, sekunda), ktorý bol zavedený v roku 1889 organizáciou BIPM (*Bureau of Weights and Measures*).

V roku 1875 (20. 5.) bol podpísaný zástupcami 18 štátov (medzi nimi aj Rakúsko-Uhorsko) Medzinárodný metrický dohovor (vstúpil do platnosti 1. 1. 1876) a zriadený Stály medzinárodný úrad pre miery a váhy. Na riešenie všetkých záležitostí týkajúcich sa metrickej sústavy bola zriadená Generálna konferencia pre miery a váhy (The General Conference on Weights and Measures CGPM (z franc. Conférence Générale des Poids et Mesures)). V roku 1889 1. zasadanie CGPM legalizovalo staré etalóny metra a kilogramu za medzinárodné etalóny dĺžky a hmotnosti.

Na svojom 10. zasadaní v roku 1954 prijala CGPM racionalizovanú a koherentnú sústavu jednotiek, založenú na jednotkách meter - kilogram - sekunda - ampér (**MKSA**), ku ktorej bola pridaná jednotka teploty kelvin a jednotka svietivosti kandela. V roku 1960 sa konalo 11. zasadnutie CGPM, ktorého sa zúčastnilo 36 členských štátov. Toto zasadnutie prijalo názov **Medzinárodná sústava jednotiek** označovanú skratkou **SI** (z francúzskeho *Système Internationale d'Unités*), nazvanej tiež metrická sústava a stanovilo pravidlá pre predpony, doplnkové a odvodené jednotky a odporučila jedinú sústavu pre

definovanie jednotiek.

13. zasadanie CGPM v roku 1967 zaviedlo novú definíciu sekundy, premenovalo jednotku teploty a zmenilo definíciu kandely. Na 14. Generálnej konferencii pre váhy a miery v roku 1971 bola prijatá siedma základná jednotka mól. Tak bolo vybraných sedem základných veličín a zodpovedajúcich jednotiek, ktoré sa stali základom **Medzinárodnej sústavy jednotiek SI** (tab. 1.1). Dnes je systém postavený na 7 základných jednotkách, ktoré sa považujú za rozmerovo nezávislé: kilogram (kg), meter (m), sekunda (s), ampér (A), kelvin (K), kandela (cd), mól (mol). Pomocou týchto jednotiek sa ich kombináciou v súlade s algebraickými pravidlami vytvoril systém odvodených jednotiek (medzi ktoré v súčasnosti patria aj rovinný a priestorový uhol). Sústavu SI ešte dopĺňajú násobky a diely (tab. 1.3). 14. zasadanie CGPM schválilo názov pascal (Pa) ako zvláštny názov pre medzinárodnú meraciu jednotku tlaku alebo mechanického napätia, newton (N) na meter štvorcový (m^2) a siemens (S) ako zvláštne označenie jednotky elektrickej vodivosti. V roku 1975 prijalo CGPM bequerel (Bq) ako jednotku aktivity rádioaktívnych nuklidov a gray (Gy) ako jednotku pre pohltenú dávku.

Konferencie CGPM sa organizujú aj v súčasnosti, 23. konferencia CGPM bola v roku 2007 a jej cieľom bolo prispôsobovať systém mier a váh novým trendom.

Medzinárodná sústava jednotiek SI zahrnuje:
- základné jednotky
- odvodené jednotky, vrátane doplnkových jednotiek

Základné jednotky SI

Sekunda (s) predstavuje časový interval zodpovedajúci 9 192 631 770 periódam kmitov žiarenia, ktoré vzniká pri prechode medzi dvoma hyperjemnými hladinami základného stavu atómu ^{133}Cs (13. CGPM, 1967).

Meter (m) je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo vo vákuu za časový interval 1/299 792 458 sekundy (17. CGPM, 1983).

Kilogram (kg) je hmotnosť platino-irídiového valca (medzinárodného prototypu kilogramu) uloženého v *Sèvres*. (3. CGPM, 1901) Tento štandard je platný od 1. konferencie CGPM od r. 1889.

Ampér (A) je stály elektrický prúd pretekajúci dvoma priamymi rovnobežnými nekonečne dlhými vodičmi zanedbateľného kruhového prierezu umiestnený-

mi vo vákuu vo vzájomnej vzdialenosti 1 meter, ktorý vytvára medzi týmito vodičmi silu 2×10^{-7} newtona na 1 meter dĺžky vodiča (9. CGPM, 1948).

Kelvin (K) je 1/273, 16 časť termodynamickej teploty trojného bodu vody (13. CGPM, 1967).

Kandela (cd) je svietivosť zdroja, ktorý v danom smere emituje monochromatické žiarenie s frekvenciou $540 \times 10^{12}\, Hz$ (hertzov) a ktorého žiarivosť v tomto smere je 1/683 wattov na steradián (16. CGPM, 1979).

Mól (mol) je látkové množstvo sústavy, ktorá obsahuje práve toľko elementárnych entít (atómov, molekúl, iónov, iných častíc), koľko je atómov v $0,012\ kg$ izotopu uhlíka ^{12}C (14. CGPM, 1971). V $0,012\ kg$ izotopu uhlíka ^{12}C sa nachádza $6,02214199 \times 10^{23}$ atómov.

Tabuľka 1.1: Základné veličiny a ich jednotky

Základná veličina	Značka veličiny	Základná jednotka	Značka jednotky
dĺžka	l	meter	m
hmotnosť	m	kilogram	kg
čas	t	sekunda	s
elektrický prúd	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množstvo	n	mól	mol
svietivosť	I	kandela	cd

Definície základných jednotiek sa historicky vyvíjali. Tak napríklad jeden meter bol v roku 1795 definovaný ako jedna desaťmilióntina poludníka od severného pólu po rovník a prechádzajúceho cez Paríž. V roku 1889 bola prijatá definícia, podľa ktorej meter bol definovaný vzdialenosťou pri $0\,^{\circ}C$ medzi osami dvoch centrálnych čiar vytvorených na tyči z platiny a irídia, uchovávanej v BIPM, ktorá bola vystavená štandardnému atmosférickému tlaku a podoprená na dvoch valcoch s priemerom najmenej jeden centimeter, symetricky umiestnených na tej istej vodorovnej platni vo vzdialenosti 571 mm jedna od druhej. Tento štandard je dodnes uložený v Medzinárodnom úrade pre váhy a miery v *Sèvres* pri Paríži. Presné kópie, nazývané tiež druhotné štandardy, boli rozoslané do metrologických laboratórií po celom svete a boli používané pri výrobe ďalších štandardov. V roku 1959 bol úradne definovaný yard ako 1 yard $= 0,9144\, m$. Táto definícia je ekvivalentná so vzťahom pre palec (inch): 1 in $= 2,54\, cm$. Neskôr vyžadovala veda a technika ešte pres-

nejší štandard ako je vzdialenosť medzi dvoma jemnými vrypmi na kovovej tyči, preto bol v roku 1960 prijatý nový štandard pre meter, ktorý vychádzal z vlnovej dĺžky svetla. *Meter bol definovaný ako* $1\,650\,763{,}73$ *násobok vlnovej dĺžky žiarenia šíriaceho sa vo vákuu zodpovedajúceho prechodu medzi hladinami* $2p_{10}$ *a* $5d_5$ *v atóme kryptónu 86* ($^{86}_{36}Kr$). Podľa tejto definície bolo možné reprodukovať meter s presnosťou 10^{-9}, čo znamená, že dĺžka kópie a originálu je rovnaká ešte na deviatom mieste za desatinou čiarkou. Požiadavky na presnosť však neustále rástli. Kým napr. v minulosti bol medzinárodný etalón pre jednotku dĺžky platino-irídiová tyč uložená v *Sèvres* pri Paríži, tak dnes je táto dĺžka definovaná pomocou rýchlosti svetla a etalónu času. V roku 1983 bol meter 17. generálnou konferenciou pre váhy a miery nanovo definovaný ako vzdialenosť, ktorú svetlo prejde vo vákuu v presne stanovenom časovom intervale. Konkrétna voľba dĺžky časového intervalu v definícii metra presne určuje rýchlosť svetla vo vákuu $c = 299\ 792\ 458\, m/s$. Snaha o získanie lepšieho štandardu viedla ku konštrukcii atómových hodín.

Kilogram bol pôvodne bol definovaný ako hmotnosť jedného litra ($1\, dm^3$) čistej odvzdušnenej vody pri teplote $4°C$ (jeden gram bol definovaný ako hmotnosť čistej vody, ktorá sa nachádza v kocke s hranami rovnej jednej stotine metra pri teplote topenia ľadu). Už prvá CGPM v roku 1889 potvrdila medzinárodný prototyp kilogramu vyrobeného zo zliatiny platiny a irídia (pomer $9:1$) s presnosťou $0{,}0001$: *tento prototyp sa odteraz považuje za jednotku hmotnosti.* V súčasnosti je podľa medzinárodného dohovoru kilogram určený hmotnosťou valca. Vďaka tejto definícii kilogram doteraz ostáva jedinou jednotkou, ktorej definícia sa nezakladá na fyzikálnom jave, ale na zhmotnenej miere. Prototyp je uložený v Medzinárodnom úrade pre váhy a miery v *Sèvres* pri Paríži, podobne ako ostatné etalóny. Presné kópie tohto etalónu boli rozoslané do laboratórií pre štandardy do ostatných štátov. Tie sú uložené v štandardizačných a metrologických inštitúciách v jednotlivých štátoch po celom svete, kde sa potom v zmysle platných noriem realizujú národné kalibrácie meracích zariadení a prístrojov. Hmotnosť ostatných telies sa meria porovnávaním s hmotnosťou s ktoroukoľvek z týchto kópií. Pre meranie hmotností elementárnych častíc, atómov a molekúl sa zvyčajne používa atómová hmotnostná jednotka u.

Pojmy ako hodina, minúta, sekunda boli všeobecne prijaté. Aj keď využívali šesťdesiatkovú sústavu, nebol dôvod na ich zmenu, len sa spresnila definícia sekundy. Sekunda bola pôvodne definovaná ako $1/86400$ časť stredného dňa.

Neskôr sa zistilo, že doba stredného slnečného dňa nie je rovnaká. Preto 11. CGPM (1960) prijala novú definíciu: *sekunda je* $1/31\,556\,925,9747$ *časť tropického roku pre* 1. 1. 1900 *o* 12. *hod. efemerického času.* To platilo do roku 1967, kedy 13. konferencia pre váhy a miery prijala štandard sekundy odvodený od frekvencie kmitov atómov céziových hodín. Presnosť céziových hodín je taká, že by trvalo 6000 rokov, aby sa údaje dvoch takýchto hodín líšili o viac ako 1 sekundu. V súčasnosti sa vyvíjajú hodiny, ktorých presnosť by bola $1 : 10^{18}$, čo by zodpovedalo odchýlke $1\,s$ za $10^{18}\,s$ (v prepočte 3×10^{10} rokov).

Odvodené jednotky SI vrátane doplnkových jednotiek SI

Tabuľka 1.2: Niektoré z odvodených veličín a ich jednotiek

Odvodená veličina	Jednotka	Názov jednotky
plošný obsah	m^2	štvorcový meter
objem	m^3	kubický meter
rýchlosť	m/s	meter za sekundu
uhlová rýchlosť	rad/s alebo s^{-1}	radián za sekundu
zrýchlenie	m/s^2	meter za sekundu na druhú
hustota	kg/m^3	kilogram na kubický meter
špecifický objem	m^3/kg	kubický meter na kilogram
koncentrácia látky	mol/m^3	mól na kubický meter
tlak	$Pa = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$	pascal
energia	$J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	joule
výkon	$W = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$	watt
sila	$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$	newton
elektrický náboj	$C = A \cdot s$	coulomb
elektrický potenciál	$V = kg \cdot m^2/(s^3 \cdot A)$	volt
elektrický odpor	$\Omega = V/A$	ohm
magnetický tok	$Wb = kg \cdot m^2/(s^2 \cdot A)$	weber
magnetická indukcia	$T = N/(A \cdot m)$	tesla
svetelný tok	$lm = cd \cdot sr$	lumen
osvetlenie	$lx = lm/m^2$	lux
rovinný uhol	rad	radián
priestorový uhol	sr	steradián

Odvodené jednotky sa odvodzujú zo základných jednotiek pomocou definičných vzťahov medzi fyzikálnymi veličinami. Napríklad jednotku sily (newton (N)) možno určiť nasledujúco: veľkosť sily je daná vzťahom $F = m\,a$, kde m je hmotnosť a a je zrýchlenie. Zo vzťahu pre veľkosť zrýchlenia rovnomerne

zrýchleného pohybu vyplýva $a = v/t$. Veľkosť rýchlosti rovnomerného pohybu v je zase daná podielom dráhy (meter (m)) a času (sekunda (s)) $v = s/t$. Pomocou týchto vzťahov je možné postupne získať jednotky pre rýchlosť $[v] = m/s$, zrýchlenie $[a] = m/s^2$ a nakoniec aj pre silu $[F] = N = kg \cdot m/s^2$. Analogickým spôsobom je možné získať jednotky všetkých fyzikálnych veličín.

Medzi odvodené jednotky so zvláštnymi názvami sú zaradené aj radián a steradián, ktoré tvorili samostatnú triedu doplnkových jednotiek, ktorá však bola Generálnou konferenciou pre váhy a miery v roku 1995 zrušená. *Radián (rad)* je rovinný uhol zovretý dvoma polomermi kružnice, ktoré vytínajú na kružnici oblúk rovnakej dĺžky, akú má jej polomer. *Steradián (sr)* je priestorový uhol kužeľa, ktorý s vrcholom v strede gule vytína na povrchu tejto gule plochu s obsahom rovnajúcim sa druhej mocnine polomeru gule.

Predpony SI

Tabuľka 1.3: Násobky jednotiek

Názov	Značka	Násobok	Faktor
yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000	10^{24}
dzéta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000	10^{21}
exa	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
peta	P	1 000 000 000 000 000	10^{15}
tera	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga	G	1 000 000 000	10^{9}
mega	M	1 000 000	10^{6}
kilo	k	1 000	10^{3}
hekto	h	100	10^{2}
deka	da	10	10^{1}
deci	d	0,1	10^{-1}
centi	c	0,01	10^{-2}
mili	m	0,001	10^{-3}
mikro	μ	0,000 001	10^{-6}
nano	n	0,000 000 001	10^{-9}
piko	p	0,000 000 000 001	10^{-12}
femto	f	0,000 000 000 000 001	10^{-15}
atto	a	0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}
zepto	z	0,000 000 000 000 000 000 001	10^{-21}
yokto	y	0,000 000 000 000 000 000 000 001	10^{-24}

Väčšie a menšie jednotky sa získavajú ako násobky základných jednotiek násobením faktorom 10^3, resp. 10^{-3} (okrem menších násobkov a dielov (hekto (10^2), deka (10^1) a diely deci (10^{-1}), centi (10^{-2})). Názov vynásobenej jednotky sa získa pridaním zodpovedajúcej predpony k názvu jednotky. Výnimkou z tohoto pravidla je jednotka hmotnosti, kde sa násobky jednotky vytvárajú so základom gram.

Jednotky mimo sústavy SI uznané ako používateľné spolu s SI

Pre všeobecnú rozšírenosť a užitočnosť sa okrem spomínaných jednotiek SI používajú aj ďalšie jednotky mimo sústavy SI, ale ich používanie je akceptované. Základnou jednotkou času v SI je sekunda, ale akceptované sú aj minúta (min), hodina (h), deň (d). Prehľad ostatných uznaných jednotiek mimo sústavy SI je uvedený v tabuľke 1.4.

Tabuľka 1.4: Niektoré z ďalších jednotiek mimo SI, ktoré sú akceptované a používané s SI.

Veličina	Názov jednotky	Značka	Definícia
čas	minúta	min	$1\,min = 60\,s$
	hodina	h	$1\,h = 3600\,s$
	deň	d	$1\,d = 86400\,s$
rovinný uhol	stupeň	$^\circ$	$1^\circ = (\pi/180)\,rad$
	minúta	$'$	$1' = (\pi/10800)\,rad$
	sekunda	$''$	$1'' = (\pi/648000)\,rad$
dĺžka	astronomická jednotka	AU	$1\,AU = 1,4959787 \text{ x } 10^{11}\,m$
	parsec	pc	$1\,pc = 30,85678 \text{ x } 10^{15}\,m$
	svetelný rok	$l.y.$	$1\,l.y. = 9,460730 \text{ x } 10^{15}\,m$
plošný obsah	hektár	ha	$1\,ha = 10^4\,m^2$
	ár	a	$1\,a = 10^2\,m^2$
objem	liter	l	$1\,l = 10^{-3}\,m^3$
hmotnosť	tona	t	$1\,t = 10^3\,kg$
	zjednotená atómová jednotka hmotnosti	u	$1\,u \approx 1,66054 \text{ x } 10^{-27}\,kg$
optická mohutnosť	dioptria	D	$1\,D = 1\,m^{-1}$
energia	elektrónvolt	eV	$1\,eV \approx 1,602177 \text{ x } 10^{-19}\,J$

Systém SI nie je statický, ale sa vyvíja tak, aby spĺňal zvyšujúce sa požiadavky na merania.

2 Základy vektorového počtu

Fyzikálne veličíny sa dajú rozdeliť do dvoch skupín. Prvú skupinu fyzikálnych veličín tvoria tie, pre ktorých jednoznačné určenie postačí poznať veľkosť danej fyzikálnej veličiny so zodpovedajúcou jednotkou, napr. určenie dĺžky $l = 2\,m$, hmotnosti $m = 3\,kg$, objemu $V = 7\,m^3$. Druhú skupinu fyzikálnych veličín tvoria tie, kde pre ich jednoznačné určenie nestačí poznať len veľkosť a jednotku, napr. rýchlosť vetra je $v = 5\ m/s$ alebo na teleso pôsobí sila $F = 3\,N$. Pre určenie týchto veličín je potrebné poznať aj smer. Prvej skupine fyzikálnych veličín hovoríme, že sú **skalárne fyzikálne veličiny**, druhú skupinu veličín zaraďujeme k **vektorovým fyzikálnym veličinám**.

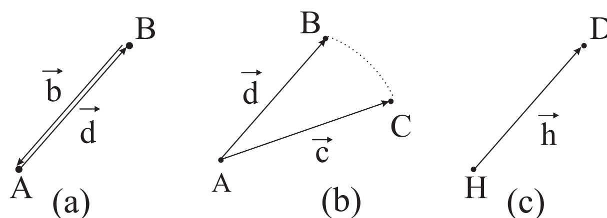
2.1 Skalárne a vektorové fyzikálne veličiny

Skalárne fyzikálne veličiny - **skaláry** (z lat. *scalae* - stupnice) sú jednoznačne určené veľkosťou číselnej hodnoty a jednotkou, v ktorej sa príslušná veličina meria. Medzi skalárne veličiny patrí napr. čas, teplota, hustota a iné. Hodnotu skaláru znázorňujeme bodom na príslušnej stupnici, napr. bodom na časovej stupnici (časovej osi) alebo na ciferníku hodín, bodom na teplotnej stupnici, bodom na dĺžkovej stupnici (stupnici dĺžkového meradla). Skalárne fyzikálne veličiny označujeme písmenami, t. j. dohodnutými značkami príslušných veličín. Pre operácie so skalárnymi veličinami platia pravidlá algebry.

Vektorové fyzikálne veličiny - **vektory** (z lat. *vektor* - nosič, jazdec) sú jednoznačne určené veľkosťou (číselnou hodnotou a jednotkou) a smerom. Medzi vektorové fyzikálne veličiny patrí napr. sila, moment sily, rýchlosť a iné. Graficky vektor znázorňujeme **orientovanou úsečkou**. Priamka preložená jej koncovými bodmi sa nazýva vektorová priamka. Vektorová priamka a šípka označujú smer a dĺžka úsečky znázorňuje veľkosť vektora. Je potrebné si uvedomiť, že veľkosť vektora je skalár. Ako symbol pre vektory sa v tlači

používa hrubé písmeno, (napr. **F** - sila) alebo vektory označujeme šípkou nad písmenom fyzikálnej veličiny $\vec{F}$ (takýmto spôsobom budeme aj my označovať vektory v tejto učebnici).

Na obrázku 2.1(a) je znázornený vektor posunutia $\vec{d}$, ktorý charakterizuje zmenu polohy ľubovoľného telesa (napr. auta) z miesta A do miesta B. Dĺžka úsečky AB znázorňuje vo zvolenej mierke vzdialenosť začiatočného a koncového bodu pri pohybe a nazýva sa **veľkosť posunutia** d (budeme označovať $\left|\vec{d}\right|$). Smer polpriamky AB **určuje smer posunutia**. V prípade posunutia z miesta B do miesta A ide o opačný smer, a teda vektor $\vec{b} = -\vec{d}$, vektor $\vec{b}$ je rovnako veľký ako vektor $\vec{d}$, ale je opačne orientovaný (hovoríme, že vektor $\vec{b}$ je **opačným vektorom** k vektoru $\vec{d}$). Vektory, ktoré sú rovnobežné s jednou priamkou nazývame **kolineárne**. Posunutie z miesta A do miesta C má rovnakú veľkosť, ale rôzny smer, preto vektory $\vec{c}$ a $\vec{d}$ aj keď majú rovnakú veľkosť, nie sú rovnaké (obr. 2.1(b)). Dva vektory považujeme za rovnaké len vtedy, ak majú rovnaký smer a rovnakú veľkosť (vektory $\vec{d}$ a $\vec{h}$ (obr. 2.1(c))). Vektory rovnobežné s jednou rovinou sa nazývajú **komplanárne**.



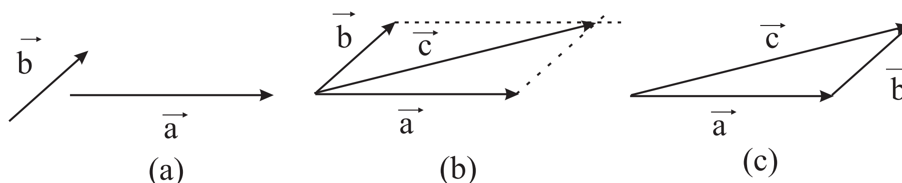
Obrázok 2.1: a) Posunutie z miesta A do miesta B charakterizované vektorom $\vec{d}$. Posunutie z miesta B do A je vektor $\vec{b}$ (príklad kolineárnych vektorov). b) Znázornenie posunutia z A do C reprezentované vektorom $\vec{c}$ s rovnakou veľkosťou ako $\vec{d}$, ale rôznym smerom (príklad komplanárnych vektorov). c) Posunutie z miesta H do D je vektor $\vec{h}$, ktorý má rovnakú veľkosť a smer ako vektor $\vec{d}$, t. j. je to ten istý vektor $\vec{d}$.

2.2 Operácie s vektormi

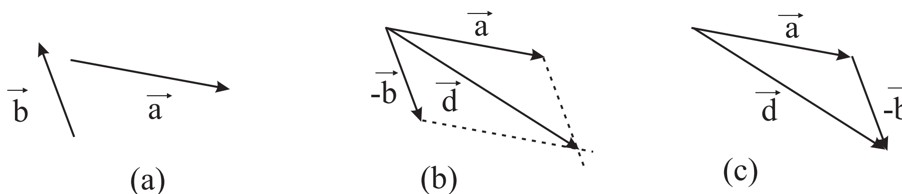
Pre počítanie s vektormi platia odlišné pravidlá ako pre počítanie s reálnymi číslami. Výsledkom vektorového **súčtu dvoch vektorov** $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\,. \tag{2.1}$$

Grafický súčet vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (obr. 2.2(a)) je možné znázorniť dvoma spôsobmi. Prvým spôsobom sa posunú vektory do spoločného počiatku (obr. 2.2(b)). Potom cez koncové body vektorov vedieme rovnobežky s príslušnými vektormi. Spojením počiatočného bodu vektorov s priesečníkom rovnobežiek dostávame výsledný vektor $\vec{c}$ ako súčet vektorov $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Pri druhom spôsobe sa do koncového bodu prvého vektora umiestni začiatočný bod druhého vektora (obr. 2.2(c)). Výsledný vektor $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$ je určený začiatočným bodom prvého vektora a koncovým bodom druhého vektora. Súčet vektorov je komutatívna operácia, čiže výsledok súčtu nezávisí od poradia vektorov: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Ak chceme spočítať viacero vektorov, spočítavame ich postupne, t. j. k súčtu prvých dvoch pripočítame tretí vektor atď.



Obrázok 2.2: Grafický súčet vektorov.



Obrázok 2.3: Grafický rozdiel vektorov.

Rozdiel vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ môžeme definovať ako súčet vektora $\vec{a}$ s opačne orientovaným vektorom k $\vec{b}$ (Vektor $-\vec{b}$ má rovnakú dĺžku ako vektor $\vec{b}$, ale má opačný smer ako vektor $\vec{b}$.)

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \; . \tag{2.2}$$

Graficky rozdiel môžeme znázorniť analogickým postupom ako súčet, čo vyplýva priamo zo zápisu rozdielu. Ak graficky získame opačne orientovaný vektor $-\vec{b}$ k vektoru $\vec{b}$, celá operácia rozdielu sa zmení na súčet dvoch vektorov. Rovnako aj pri odčítaní dvoch vektorov je možné postupovať obidvoma spô-

sobmi (obr. 2.3). Sčítanie alebo odčítanie vektorov má vo fyzike zmysel len pre fyzikálne veličiny rovnakého druhu (napr. len pre sily, momenty síl atď.)
Násobenie vektora $\vec{a}$ kladným číslom n dáva vektor $\vec{c}$ rovnakého smeru, ktorého veľkosť sa rovná n-násobku veľkosti násobeného vektora

$$\vec{c} = n\,\vec{a}\,. \tag{2.3}$$

Skalárny násobok vektora je vektorovou veličinou, t. j. keď násobíme silu reálnym číslom, tento súčin je opäť sila. Pri násobení vektora záporným číslom ($n < 0$) má výsledný vektor $\vec{c}$ opačný smer ako vektor $\vec{a}$. Veľkosť vektora $|\vec{c}|$ je $|\vec{c}| = n\,|\vec{a}|$, t. j. absolútna veľkosť vektora je n-krát väčšia ako veľkosť vektora $\vec{a}$.

Každý vektor je možné vždy vyjadriť ako skalárny násobok tzv. **jednotkového vektora** $\vec{a}^{\,0}$ a skalárnej hodnoty, ktorá je reprezentovaná jeho absolútnou hodnotou

$$\vec{a} = |\vec{a}|\;\vec{a}^{\,0} = a\,\vec{a}^{\,0}\,. \tag{2.4}$$

Jednotkový vektor je definovaný ako vektor, ktorého veľkosť, a teda absolútna hodnota je rovná jednej. Označuje sa zvyčajne symbolmi $\vec{\nu}$, $\vec{\rho}$, $\vec{a}^{\,0}$, $\vec{b}^{\,0}$ alebo v prípade jednotkových vektorov totožných s kladnými smermi súradnicového systému xyz $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Pre veľkosť jednotkových vektorov $\vec{a}^{\,0}$, resp. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ teda platí

$$\left|\vec{a}^{\,0}\right| = \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1\,. \tag{2.5}$$

Tak, ako je možné súčtom vektorov vytvoriť výsledný vektor, existuje inverzný postup, pri ktorom je pomocou **rozkladu vektora do daných smerov** možné získať zložky vektora. Takýto rozklad je možné urobiť do ľubovoľných smerov, ale najčastejšie aj z praktických dôvodov sa používa rozklad do smerov totožných so smerom osí súradnicového systému, v ktorom je vektor definovaný.

Ak máme vektor $\vec{a}$ v dvojrozmernom súradnicovom systéme x, y, rozklad vektora do daných smerov (napr. určených polpriamkami x, y) robíme pomocou vektorového rovnobežníka, t. j. hľadáme také dva vektory, aby ich zložením vznikol vektor $\vec{a}$. Vektory $\vec{a}_x$ a $\vec{a}_y$ predstavujú kolmé priemety vektora $\vec{a}$ do osí x a y súradnicovej sústavy a nazývajú sa zložky vektora (obr. 2.4), pričom platí

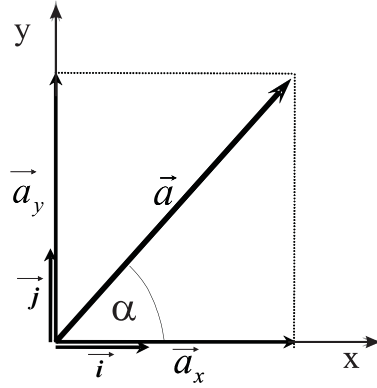
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y\,. \tag{2.6}$$

Veľkosť vektora možno na základe predchádzajúcej definície vypočítať pomocou vzťahu

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ . \tag{2.7}$$

Veľkosť vektora je vždy kladná hodnota. Je zrejmé, že vektor $\vec{a}$ v takomto súradnicovom systéme zviera s osou x uhol α. Zložky vektora $\vec{a}_x$ a $\vec{a}_y$ sa potom dajú vyjadriť ako kolmé priemety takto

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= |\vec{a}|\cos\alpha\,\vec{i}\ , \\ \vec{a}_y &= |\vec{a}|\sin\alpha\,\vec{j}\ . \end{aligned} \tag{2.8}$$



Obrázok 2.4: Znázornenie vektora $\vec{a}$, jeho zložiek $\vec{a}_x$ a $\vec{a}_y$ v pravouhlej súradnicovej sústave a jednotkových vektorov $\vec{i}$ a $\vec{j}$ v smere osí x a y.

Pri vyjadrovaní fyzikálnych zákonov a veličín sa často stretávame so skalárnym a vektorovým súčinom. Samotný názov napovedá, že výsledkom skalárneho súčinu je skalár a výsledkom vektorového súčinu je vektor.

Výsledkom **skalárneho súčinu** vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je hodnota, ktorú dostaneme ako súčin absolútnych hodnôt vektorov a kosínusu uhla, ktorý zvierajú

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha = a\,b\,\cos\alpha\ . \tag{2.9}$$

Z takejto definície vyplýva, že v prípade kolmých vektorov je výsledkom skalárneho súčinu nulová hodnota a v prípade rovnobežných vektorov je výsledkom súčin veľkostí obidvoch vektorov $a\,b$. Skalárny súčin vektora so sebou samým je

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^{\,2} = a\,a\,\cos\alpha = a^2\ . \tag{2.10}$$

Ak vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ sú v trojrozmernom Euklidovom súradnicovom systéme (systém troch navzájom kolmých osí v priestore pretínajúcich sa v jednom bode) definované pomocou zložiek $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ a $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$, možno ich zapísať ako lineárnu kombináciu jednotkových vektorov $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\ , \\ \vec{b} &= b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Skalárny súčin je možné vyjadriť nasledujúco

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k})\cdot(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}) \\ &= a_x\,b_x\,\vec{i}\cdot\vec{i} + a_x\,b_y\,\vec{i}\cdot\vec{j} + a_x\,b_z\,\vec{i}\cdot\vec{k} \\ &+ a_y\,b_x\,\vec{j}\cdot\vec{i} + a_y\,b_y\,\vec{j}\cdot\vec{j} + a_y\,b_z\,\vec{j}\cdot\vec{k} \\ &+ a_z\,b_x\,\vec{k}\cdot\vec{i} + a_z\,b_y\,\vec{k}\cdot\vec{j} + a_z\,b_z\,\vec{k}\cdot\vec{k} \\ &= a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z\ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Násobenie členov so zmiešanými zložkami ako $a_x\,b_y$, $a_x\,b_z$ atď. je nulové, pretože skalárne súčiny vzájomne kolmých jednotkových vektorov sú rovné nule. Pre skalárny súčin dvoch vektorov platí komutatívny zákon

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\ . \tag{2.13}$$

Výsledkom **vektorového súčinu** dvoch vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$. Symbolicky sa vektorový súčin zapíše takto

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\ . \tag{2.14}$$

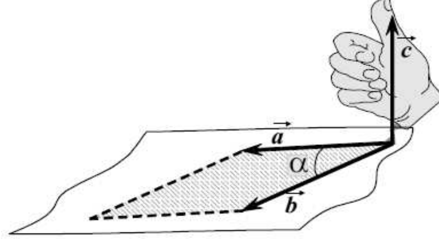
Výsledný vektor $\vec{c}$ je kolmý na rovinu určenú vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Vektor $\vec{c}$ má taký smer, že z jeho konca sa stotožnenie prvého vektora súčinu s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako pohyb proti chodu hodinových ručičiek. Praktickejší spôsob pre určenie smeru je definícia pomocou pravidla pravej ruky, podľa ktorej vektor $\vec{c}$ smeruje na tú stranu roviny, na ktorú ukazuje vztýčený palec, ak zahnuté prsty pravej ruky smerujú po kratšom oblúku od prvého vektora k druhému (obr. 2.5).

Pre veľkosť vektora $\vec{c}$ platí

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = a\,b\,\sin\alpha\ . \tag{2.15}$$

Graficky veľkosť vektora zodpovedá obsahu rovnobežníka určeného vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Ak $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor v smere vektora $\vec{c}$ potom môžeme vektorový súčin zapísať tiež v tvare

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a\, b \sin\alpha\, \vec{\nu}\ . \tag{2.16}$$



Obrázok 2.5: Vektorový súčin dvoch vektorov a smer výsledného vektora.

Ak sú jednotkové vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ totožné so smermi osí pravouhlého súradnicového systému x, y, z, môžeme pre vektorový súčin medzi jednotkovými vektormi písať

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=\vec{0} & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0} & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\ . \end{array} \tag{2.17}$$

V prípade, že je známy rozklad vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ v trojrozmernom súradnicovom systéme pomocou zložiek, ako je uvedené vo vzťahu (2.11) je možné vektorový súčin vyjadriť nasledujúco

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k})\times(b_x\,\vec{i}+b_y\,\vec{j}+b_z\,\vec{k}) = \\ &= a_x\,b_x\,\vec{i}\times\vec{i}+a_x\,b_y\,\vec{i}\times\vec{j}+a_x\,b_z\,\vec{i}\times\vec{k}+a_y\,b_x\,\vec{j}\times\vec{i}+a_y\,b_y\,\vec{j}\times\vec{j}+ \\ &+ a_y\,b_z\,\vec{j}\times\vec{k}+a_z\,b_x\,\vec{k}\times\vec{i}+a_z\,b_y\,\vec{k}\times\vec{j}+a_z\,b_z\,\vec{k}\times\vec{k} \\ &= (a_y\,b_z-a_z\,b_y)\,\vec{i}+(a_z\,b_x-a_x\,b_z)\,\vec{j}+(a_x\,b_y-a_y\,b_x)\,\vec{k}\ , \end{aligned} \tag{2.18}$$

pričom pre získanie výsledného vzťahu pre vektorový súčin sme využili poznatky o vektorovom súčine jednotkových vektorov zo vzťahu (2.17). Vektorový súčin môžeme zapísať aj pomocou determinantu

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.19}$$

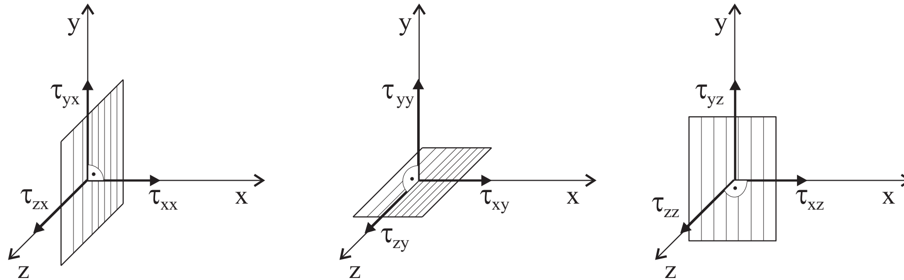
Pre vektorový súčin na rozdiel od skalárneho súčinu neplatí komutatívny zákon. Zmenou poradia sa zmení aj smer výsledného vektora

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) . \tag{2.20}$$

Okrem skalárnych a vektorových fyzikálnych veličín poznáme aj tzv. **tenzorové** fyzikálne veličiny. Sú to veličiny, ktoré charakterizuje 9 (3^2, prípadne $3^3 = 27$) zložiek. Ak napríklad rozložíme vektor napätia σ na jednotlivé napätia v smere osí x, y, z a to jednak normálové pôsobiace kolmo k rovine súradníc a jednak na dotyčnicové (tangenciálne) pôsobiace v smere osí súradníc a všetky napätia označíme znakom τ s dvoma indexami, pričom prvý udáva smer osí súradníc, v ktorom napätie pôsobí a druhý udáva smer, ku ktorému je rovina, v ktorej napätie pôsobí kolmá (druhý index určuje smer normály k rovine, v ktorej napätie pôsobí) dostaneme systém zložiek, ktoré je možné usporiadať do matice

$$\tau_{pq} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} , \tag{2.21}$$

pričom τ_{xx} predstavuje napätie v smere osi x v rovine kolmej k osi x, teda normálové napätie, naproti tomu τ_{xy} je napätie v smere osi x ale v rovine kolmej k osi y, teda tangenciálne napätie v rovine xz v smere osi x (obr. 2.6).



Obrázok 2.6: Zložky tenzora napätia.

V tenzorovom chápaní veličín *skalár* predstavuje tenzor nultého rádu, *vektor* α_i so zložkami $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ je tenzor prvého rádu, tenzor druhého rádu bol už spomínaný (vzťah 2.21), tenzor tretieho rádu α_{pqs} má všeobecne $3^3 = 27$ zložiek, pričom indexy p, q, s predstavujú ktorékoľvek z písmen x, y, z.

3 Kinematika hmotného bodu

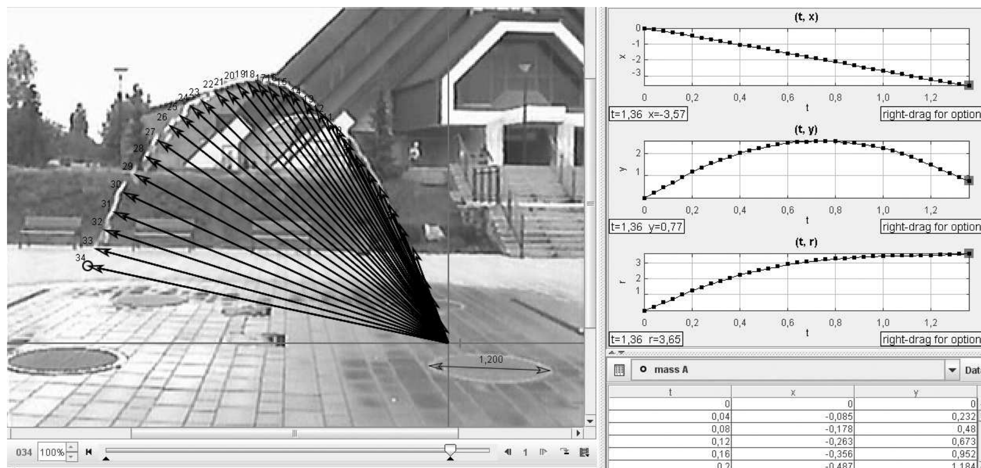
Pohyb vo všeobecnosti zahŕňa všetky zmeny a procesy, ktoré prebiehajú vo vesmíre. Je neoddeliteľnou vlastnosťou hmoty. Časť fyziky, ktorá sa zaoberá popisom pohybu telies, triedením a porovnávaním pohybov sa nazýva **kinematika**.

3.1 Hmotný bod, vzťažná sústava, trajektória, dráha pohybu

Najjednoduchšou formou pohybu je **mechanický pohyb**. Rozumieme pod ním proces, pri ktorom sa mení poloha hmotného objektu (auto, autobus, lietadlo). Aby sme si uľahčili popis pohybu telesa, nahradíme toto teleso hmotným bodom. Pod **hmotným bodom** rozumieme myslené teleso, ktorého rozmery a tvar môžeme pre popis pohybu zanedbať, avšak hmotnosť sa zachováva. Ako hmotný bod si môžeme predstaviť aj dieťa na sánkach, ktoré sa spúšťa po svahu. Predpokladáme pritom, že všetky časti sústavy dieťa-sánky sa pohybujú rovnako rýchlo a v rovnakom smere. Predstava hmotného bodu však nie je vhodná pre otáčajúce sa telesá okolo vlastnej osi (napríklad otáčajúci sa kolotoč), pretože jeho rôzne časti sa v danom okamihu pohybujú rôzne rýchlo a v rôznych smeroch. Taktiež aj pri skúmaní deformácie telesa nie je vhodné pracovať s myšlienkovým pojmom hmotného bodu.

Keďže mechanický pohyb definujeme ako premiestňovanie telesa, musíme premiestňovanie vzhľadom na niečo vzťahovať. Teleso alebo telesá, vzhľadom na ktoré pohyb opisujeme, tvoria **vzťažnú sústavu**. Pohyb a pokoj sú preto relatívne pojmy, čo sa javí vzhľadom na jednu vzťažnú sústavu v pokoji, môže byť súčasne vzhľadom na inú sústavu v pohybe a opačne (napr. skúmanie pohybu áut na diaľnici pri obiehaní). V praxi spájame s telesami tvoriacimi vzťažnú sústavu najčastejšie nejakú **súradnicovú sústavu**, napr. **pravouhlú**

pravotočivú sústavu súradníc x, y, z. (Pre zjednodušenie budeme na začiatku uvažovať o pohybe v rovine, teda sústave x, y.) Polohu objektu určujeme najčastejšie k **počiatku** súradnicovej sústavy.



Obrázok 3.1: Analýza pohybu vodného lúča fontány v Žiline.

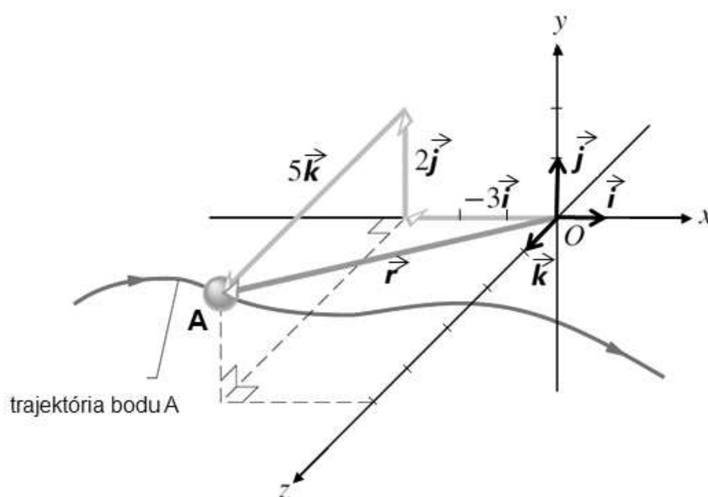
Vo fyzike sa často stretávame s úlohou, pri ktorej potrebujeme určiť polohu telesa alebo opísať jeho pohyb. Na obrázku 3.1 je v istom okamihu znázornený pohyb vodného lúča fontány na Vlčincoch v Žiline. Skúmajme teraz pohyb začiatku vodného lúča. Čiara, po ktorej sa začiatok vodného lúča pohyboval sa nazýva **trajektória**. Pri opise pohybu začiatku vodného lúča sa obmedzíme na pohyb jedného bodu, ktorý môžeme považovať za hmotný bod. Aby sme mohli skúmať pohyb bodu, potrebujeme určiť jeho **polohu v čase t** vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy x, y, t.j, súradnice x_0, y_0, t_0, x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2, ..., v ktorých sa daný bod v jednotlivých časových úsekoch pri pohybe nachádzal. Hodnoty týchto bodov zapíšeme do tabuľky. Čas sme začali merať, keď začiatok vodného lúča prechádzal bodom so súradnicami x_0, y_0. Vtedy mal čas hodnotu $t_0 = 0\,s$. V súradnicovej sústave x, y trajektória predstavuje graf vzájomnej závislosti $y = y(x)$ súradníc bodov trajektórie.

Polohu nejakého bodu A vo všeobecnosti vzhľadom na pravouhlú súradnicovú sústavu x, y, z máme určenú vtedy, keď poznáme všetky jeho tri súradnice x, y, z v priestore (x, y v rovine), kde x je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami y a z, y je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami x a z a z je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami x a y. Polohu hmotného bodu môžeme charakterizovať pomocou polohového vekto-

ra. Pod **polohovým vektorom** $\vec{r}$ hmotného bodu A vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy O budeme rozumieť orientovanú úsečku, ktorej začiatok je v bode O a koniec v bode A. Pre polohový vektor v kartézskej sústave súradníc x, y, z platí

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\ , \tag{3.1}$$

kde $x\,\vec{i}$, $y\,\vec{j}$ a $z\,\vec{k}$ sú jeho priemety do súradnicových osí a x, y, z sú pravouhlé súradnice bodu A (v rovine x, y). Vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sú jednotkové vektory totožné s kladnými smermi súradnicového systému xyz.



Obrázok 3.2: Popis polohy hmotného bodu v priestore.

O mechanickom pohybe hovoríme vtedy, keď nejaký hmotný bod mení svoju polohu vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu, čiže mení sa jeho polohový vektor, pričom koncový bod sa pohybuje s hmotným bodom a počiatočný bod trvalo splýva s počiatkom sústavy súradníc (obr. 3.2). Pohyb hmotného bodu môžeme charakterizovať vtedy, keď v každom časovom okamihu sú známe jeho súradnice, čiže ak poznáme ich funkcie závislosti od času, čo môžeme zapísať

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)\ , \tag{3.2}$$

alebo vo vektorovom tvare

$$\vec{r} = \vec{f}(t)\ , \tag{3.3}$$

vtedy hovoríme, že polohový vektor $\vec{r}$ je **vektorovou funkciou času**. Ak je poloha hmotného bodu, ktorý sa v čase t_1 nachádzal v mieste A určená

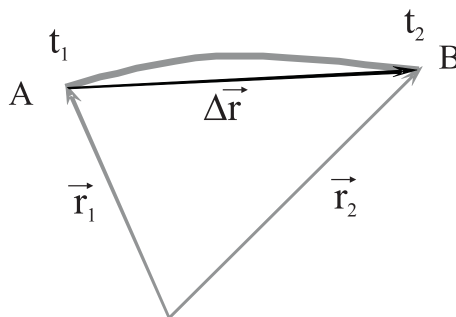
vektorom $\vec{r}_1$ a v nasledujúcom okamihu $t_1 + \Delta t$ v mieste B vektorom $\vec{r}_2$, je posunutie $\Delta\vec{r}$ hmotného bodu v časovom intervale $\Delta t = t_2 - t_1$ dané rozdielom

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,, \quad \text{resp.} \quad \vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2\,, \tag{3.4}$$

čo možno podľa vzťahu (3.1) zapísať

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}) - (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}\,.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Súradnice $(x_1,\, y_1,\, z_1)$ určujú polohový vektor $\vec{r}_1$, súradnice $(x_2,\, y_2,\, z_2)$ určujú polohový vektor $\vec{r}_2$, pričom platí: $\Delta x = (x_2 - x_1)$, $\Delta y = (y_2 - y_1)$, $\Delta z = (z_2 - z_1)$ a $\Delta t = (t_2 - t_1)$.



Obrázok 3.3: Polohový vektor pohybujúceho sa hmotného bodu z miesta A v čase t_1 a v čase t_2 v mieste B.

Sled polôh, ktoré hmotný bod počas svojho pohybu vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu zaujíma, predstavuje trajektóriu pohybu. Jej dĺžka sa nazýva **dráha pohybu**.

V dvojrozmerných prípadoch pohybu (obr. 3.1) je zložka $z = 0$. Tu si vystačíme s dvojrozmerným súradnicovým systémom určeným osami x a y, a tým aj rozklad vektora $\vec{r}$ je len rozkladom do týchto dvoch smerov

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\,. \tag{3.6}$$

Na popis jednorozmerného pohybu nám postačuje len jedna zložka polohového vektora $\vec{r}$. Ak je pohyb hmotného bodu orientovaný v smere osi x, tak platí

$$\vec{r} = x\,\vec{i}\,. \tag{3.7}$$

V prípade priamočiarych pohybov vystačíme pri určovaní polohy s dráhou s.

$$s = |\vec{r}| = x \,, \tag{3.8}$$

ktorá predstavuje veľkosť posunutia v danom smere, pričom súradnicovú sústavu si môžeme vždy zvoliť tak, aby sa pohyb uskutočňoval v kladnom smere osi x, čo nám zjednoduší opis pohybu.

3.2 Priamočiary pohyb

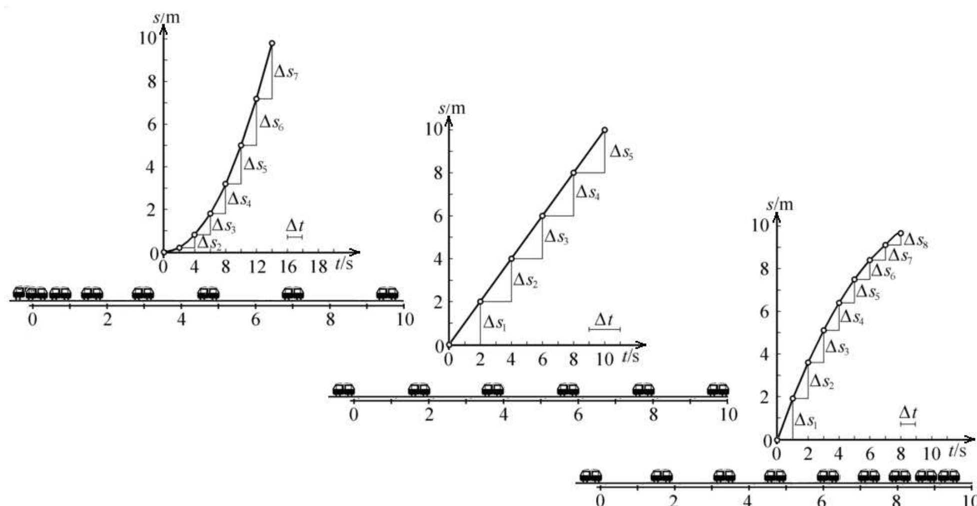


Obrázok 3.4: Analýza pohybu vlaku.

Aby sme si uľahčili opis pohybu, venujme sa teraz priamočiaremu pohybu vlaku (obr. 3.4 - opis pohybu sa prenesie z roviny x, y iba na priamku, t. j. os x). Bod, v ktorom sa začiatok vlaku nachádzal na začiatku v čase $t = 0\,s$ sme zvolili za začiatok dráhy. *Skúmať pohyb* znamená predovšetkým stanoviť závislosť $x = x(t)$, dráhy od času, prípadne ďalšie charakteristiky, ktoré sú závislé od času. Zaznamenávajme teda polohy vlaku v istých časových intervaloch (napr. $\Delta t = 0,033\,s$) zapisujme ich do tabuľky a znázorníme body so súradnicami t, x a bodmi so súradnicami $(t,\, x)$ preložme súvislú, spojitú čiaru, bez zlomov a skokov. Keďže naše merania nemusia byť celkom presné, snažíme sa, aby preložená krivka prechádzala okolo nameraných bodov čo najbližšie. Tak vytvoríme grafickú závislosť $x = x(t)$. (Dĺžku úseku Δt si

môžeme zvoliť ľubovoľne, program Tracker, pomocou ktorého bola urobená prezentovaná analýza nám umožňuje analyzovať pohyb v časových intervaloch $\Delta t = 0,033\,s$ (v závislosti od zosnímaného videa a počtu záberov za $1\,s$)). Tabuľka s hodnotami dvojíc $(x,\,t)$ predstavuje jeden zo spôsobov vyjadrenia fyzikálnej závislosti dráhy od času, $x = x(t)$. Druhý zo spôsobov, akým možno vyjadriť závislosť fyzikálnej veličiny, je grafická závislosť.

Dráha pohybu zvoleného začiatočného bodu vlaku sa v závislosti od času mení, čo vyjadruje aj zmena vektora $\vec{r}(x) = \vec{f}(t)$. Aby sme sa o spôsobe, akým sa poloha vlaku v závislosti od času mení dozvedeli viac, budeme merať zmeny dráhy $\Delta x = \Delta s$ v navzájom rovnakých časových intervaloch Δt. Zmeny dráhy sú vždy kladné, čiže dráha pohybu je veličina, ktorá vždy len narastá. Zmenu dráhy Δs zvykneme nazývať **prírastok dráhy** alebo **dráhový úsek**, ktorý vlak prešiel v časovom intervale Δt. Celková dráha s, ktorú vlak prešiel od začiatku pohybu, je rovná súčtu prírastkov - zmien dráhy Δs v jednotlivých časových intervaloch Δt, ktoré už uplynuli.



Obrázok 3.5: Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe v troch rôznych situáciách - vlak sa rozbieha, pohybuje sa rovnomerne a brzdí.

Ako si môžeme všimnúť z analýzy grafu $s = s(t)$, akokoľvek ľubovoľne si zvolíme veľkosť Δt, pri rovnakých zmenách Δt dráha narastie o rovnakú hodnotu Δs (stredný obrázok 3.5). Tento pohyb môžeme charakterizovať ako **pohyb rovnomerný priamočiary**. Hovoríme, že teleso sa pohybuje **rovnomerne**, ak v ľubovoľných, ale navzájom rovnakých časových interva-

loch Δt prejde rovnaké dráhy Δs.
Ak teleso v ľubovoľných, ale navzájom rovnakých časových intervaloch Δt prejde rôzne úseky dráhy Δs, hovoríme, že sa pohybuje **nerovnomerným pohybom**. Takým pohybom sa pohybuje napríklad vlak pri rozbiehaní alebo pri brzdení.

Analyzujme teraz pohyb vlaku. Na prvom obrázku 3.5 sa zmeny dráhy Δs, prislúchajúce navzájom rovnakým časovým intervalom Δt, postupne zväčšujú. Nerovnomerný pohyb pri rozbiehaní vlaku sa nazýva **zrýchlený pohyb**. Na treťom obrázku 3.5 sa zmeny dráhy Δs, prislúchajúce navzájom rovnakým časovým intervalom Δt, postupne zmenšujú. Nerovnomerný pohyb vlaku pri brzdení sa nazýva **spomalený pohyb**.

3.2.1 Rýchlosť a dráha priamočiareho pohybu

Pojem rýchlosť používame v bežnom živote často bez toho, aby sme si uvedomovali, že to je **fyzikálna veličina**. Z praxe vieme, že keď napr. auto prejde určitú vzdialenosť, napr. zo Žiliny do Bratislavy 200 km za dve hodiny, vypočítame jeho rýchlosť tak, keď určíme dráhu, ktorú auto prešlo za jednu hodinu. Inokedy zase odmeriame čas $\Delta t = 10\,s$, za ktorý šprintér, zabehne dráhu $\Delta s = 100\,m$. Každý, kto cestoval autom vie, že na 200 km dlhej ceste sa auto nepohybuje stále rovnako. Na ceste sú úseky, na ktorých sa auto pohybuje rýchlejšie a na iných úsekoch je jeho rýchlosť obmedzená dopravnou značkou. Podobne je to aj so šprintérom. Najprv bol pri štarte v pokoji a až po rozbehu sa mu podarilo dosiahnuť maximálnu rýchlosť.

Rýchlosť, ktorú sme vypočítali pre dvojhodinový pohyb auta alebo pre desaťsekundový beh športovca, nazývame **priemerná veľkosť rýchlosti** a definujeme ju ako podiel celkovej dráhy s a časového intervalu, v ktorom sa daný pohyb uskutočnil:

$$v_p = \frac{s}{t}\ . \tag{3.9}$$

Jednotku rýchlosti v sústave SI určíme podľa známeho predpisu

$$[v_p] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}\ .$$

Podľa potreby používame aj iné jednotky rýchlosti, napr. cm/s. Pri opise dopravných situácií zvykneme vyjadrovať rýchlosť v jednotkách kilometer za

hodinu (km/h). Pri prepočtoch týchto jednotiek môžeme písať

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000\,m}{3600\,s} = 0,277\,\frac{m}{s} \approx 0,28\ m \cdot s^{-1}\ .$$

Pre riešenie každodenných úloh je praktické si pamätať prepočet

$$36\frac{km}{h} = 36\frac{1000\,m}{3600\,s} = 10\,\frac{m}{s} = 10\ m \cdot s^{-1}\ \text{alebo}\ 1\ m \cdot s^{-1} = 3,6\ km \cdot h^{-1}\ .$$

Pod tzv. **priemernou** alebo **strednou rýchlosťou** $\overline{v_p}$ rozumieme podiel posunutia Δs v určitom časovom intervale Δt a dĺžky tohto intervalu.

$$\overline{v_p} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\ . \tag{3.10}$$

Priemerná rýchlosť je podľa definície (3.10) závislá od dĺžky časového intervalu, v ktorom ju určujeme a od zmeny dráhy v tomto intervale. Ako sa môžeme presvedčiť z obrázku 3.5, *veľkosť priemernej rýchlosti rovnomerného pohybu sa v závislosti od času nemení.* **Priemerná rýchlosť nerovnomerného pohybu sa v závislosti od času mení.**

Ak sa ale opýtame, ako rýchle sa daný objekt pohybuje, máme na mysli rýchlosť telesa v danom okamihu, to znamená tzv. **okamžitú rýchlosť**. Tú dostaneme z priemernej rýchlosti tak, že budeme časový interval Δt, meraný od okamihu t do okamihu $t + \Delta t$, zmenšovať až k nule. S poklesom hodnoty Δt sa priemerná rýchlosť meraná v intervale $(t,\ t+\Delta t)$ blíži k istej limitnej hodnote, čiže **derivácii vektora posunutia, ktorá definuje rýchlosť v okamihu** t

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\ . \tag{3.11}$$

Veličiny $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}t$ nazývame **infinitezimálnymi** (nekonečne malými (ale reálnymi)) alebo **elementárnymi**. Ich fyzikálny význam spočíva v tom, že označujú veľmi malé hodnoty alebo zmeny príslušných fyzikálnych veličín. Okamžitá rýchlosť je vektorovou veličinou. **Veľkosť okamžitej rýchlosti** (alebo **veľkosť rýchlosti**) má vždy nezápornú hodnotu a postráda informáciu o smere. To, čo určuje rýchlomer v automobile, predstavuje práve veľkosť rýchlosti.

Ak využijeme poznatky o diferenciálnych operáciách a integrálnom počte, môžeme zo všeobecnej definície rýchlosti (3.11) odvodiť vzťah pre dráhu priamočiareho pohybu hmotného bodu.

V prípade rovnomerného pohybu je rýchlosť $v = v_0$ a keďže veľkosť priemernej rýchlosti sa nemení, možno vzťah (3.10) upraviť do tvaru

$$\Delta s = v_0\,\Delta t\ ,$$

pričom pre celkovú dráhu prejdenú v čase t môžeme písať známy vzťah (za predpokladu, že v čase $t = 0\,s$ bola prejdená dráha nulová)

$$s = v_0\, t\ . \tag{3.12}$$

Pozrime sa teraz na graf závislosti rýchlosti od času a pokúsme sa hľadať isté súvislosti so vzťahom (3.12). Keďže ide o rovnomerný pohyb, grafom závislosti $v = v(t)$ je úsečka v danom časovom intervale. Ak veľkosť rýchlosti v_0 vynásobíme s časom, v ktorom daný pohyb skúmame, dostaneme podľa vzťahu (3.12) prejdenú dráhu a podľa grafu obsah plochy pod grafom závislosti $v = v(t)$. Možno teda konštatovať, že **dráhu, ktorú teleso pri rovnomernom pohybe prejde, určíme ako obsah plochy pod grafom závislosti rýchlosti od času**. Tento významný poznatok je možné zovšeobecniť aj pre nerovnomerné pohyby. Vo všeobecnosti si možno časovú os rozdeliť na menšie časové úseky Δt, v ktorých môžeme priemernú rýchlosť v_i považovať za konštantnú. Hodnotu celkovej prejdenej dráhy s istým priblížením a chybou určíme ako súčet obsahov všetkých obdĺžnikov so stranami Δt a v_i, čo môžeme zapísať

$$s = \sum_i v_i\, \Delta t\ . \tag{3.13}$$

Zmenšovaním intervalov na minimum ($\Delta t \to 0$) sa budeme blížiť k skutočnej hodnote prejdenej dráhy v danom čase, čo môžeme zapísať

$$s = \sum_i \lim_{\Delta t \to 0} v_i \Delta t\ , \tag{3.14}$$

čo je ekvivalentné zápisu pomocou integrálu

$$s = \int \mathrm{d}s = \int v\, \mathrm{d}t\ . \tag{3.15}$$

V prípade rovnomerného pohybu, kedy je rýchlosť stále konštantná, môžeme podľa pravidiel pre integrovanie ju vyňať pred integrál, čím dostaneme

$$s = \int ds = \int v_0\, \mathrm{d}t = v_0 \int \mathrm{d}t = v_0\, t + c\ , \tag{3.16}$$

kde c je integračná konštanta, ktorú vypočítame, ak poznáme prejdenú dráhu v čase $t = 0\,s$. Ak prejdená dráha v čase $t = 0\,s$ bola $s = s_0$, môžeme písať

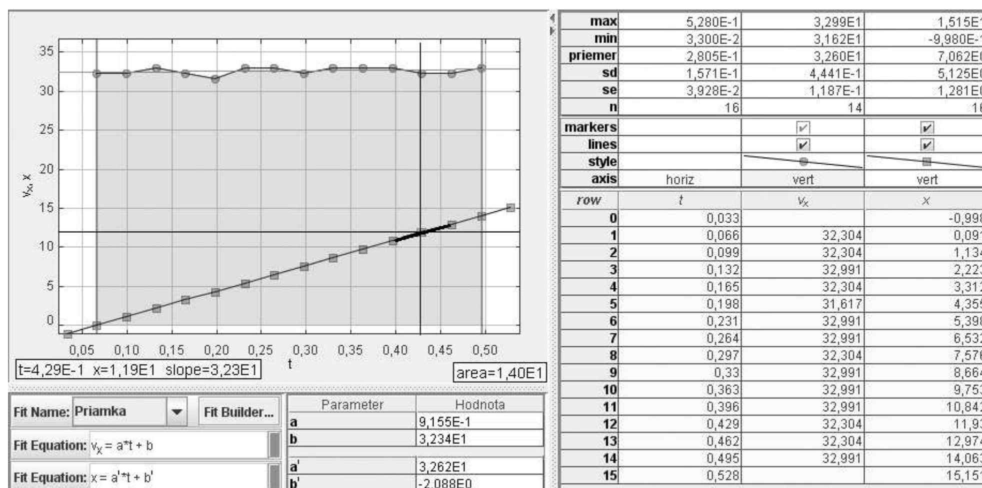
$$s(t = 0\,s) = s_0 = v_0\, 0 + c\ \Rightarrow\ c = s_0\ . \tag{3.17}$$

V konečnom dôsledku po úpravách dostávame vzťah

$$s = v_0\, t + s_0 \;, \tag{3.18}$$

ktorý je známym vyjadrením dráhy rovnomerného priamočiareho pohybu hmotného bodu. V prípade, že v čase $t = 0\,s$ bola dráha $s_0 = 0\,m$, potom vzťah (3.18) prejde na zjednodušený tvar

$$s = v_0\, t \;. \tag{3.19}$$



Obrázok 3.6: Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe z obrázku 3.4.

Ako môžeme vidieť z obrázku 3.6, rýchlosť pohybu vlaku (vyjadrenú na grafe guľôčkami) môžeme považovať za približne konštantnú ($v = 32,3\ m/s$ z grafickej závislosti, zo štatistiky $v = 32,6\ m/s$) a pohyb vlaku za rovnomerný priamočiary. Ak teraz porovnáme obsah plochy pod grafom závislosti rýchlosti v časovom intervale od $t_1 = 0,066\,s$ do $t_{14} = 0,495\,s$ (čo je hodnota v rámiku area = 14) s prejdenou dráhou v danom časovom intervale ($\Delta s = \Delta x = x_{14} - x_1 = 14,063\,m - 0,091\,m = 13,972\,m \approx 14\,m$) zistíme, že hodnoty sú navzájom rovnaké. To znamená, že prejdená dráha v danom časovom intervale je rovná obsahu plochy pod krivkou časovej závislosti rýchlosti v tom istom časovom intervale. **Ak teda určíme obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti od času v ktoromkoľvek časovom intervale, určíme tak dráhu, ktorú teleso v danom časovom intervale prešlo.**

Z analýzy dráhy pohybu vlaku na obrázku 3.6 môžeme usúdiť, že dráha pohybu vlaku sa rovnomerne zvyšovala s časom, čo možno charakterizovať rovnicou v analytickom vyjadrení $x(t) = 32,6\,t - 2,088$. To znamená, že pohyb vlaku je rovnomerný priamočiary s rýchlosťou $v = 32,6\ m/s$ a v čase $t = 0\,s$ bola prejdená dráha $s_0 = -2,088\ m$ (čo súvisí pri danej analýze s posunom vzťažnej sústavy kvôli lepšej analýze rýchlosti). V čase $t_{12} = 0,429\,s$ bola na grafe závislosti dráhy od času urobená dotyčnica ku grafu, ktorej smernica má hodnotu 32,3 (slope = 32,3). Ak túto hodnotu porovnáme s hodnotou rýchlosti v danom čase ($v(t_{12} = 0,429\,s) = 32,304\ m/s$), zistíme, že dané hodnoty sú si navzájom odpovedajúce. To znamená, že **ak na grafe závislosti dráhy od času určíme v ktoromkoľvek časovom intervale hodnotu smernice dotyčnice, určíme zároveň aj rýchlosť pohybu telesa v danom časovom okamihu**. Matematicky je okamžitá rýchlosť rovná smernici dotyčnice ku grafu funkcie $s = s(t)$.

3.2.2 Zrýchlenie priamočiareho pohybu

Rýchlosť pohybu môže byť stála alebo sa môže meniť. Pohyb, pri ktorom sa rýchlosť mení sa nazýva **zrýchleným**. Keďže rýchlosť je vektor, o zrýchlený pohyb pôjde nielen vtedy, keď sa bude meniť veľkosť rýchlosti, ale aj vtedy, keď sa bude meniť smer rýchlosti. Ako miera pre zmenu rýchlosti za jednotku času sa zavádza **zrýchlenie**.

Priemerné (stredné) zrýchlenie $\overline{a}$ v časovom intervale Δt je definované

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\ . \tag{3.20}$$

Podobne ako pri rýchlosti, tak aj pri zrýchlení dostaneme **okamžité zrýchlenie** tak, že časový interval Δt sa bude približovať k nule

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\ . \tag{3.21}$$

Hovoríme, že **zrýchlenie** a **sa rovná derivácii rýchlosti podľa času**, čiže v danom okamihu je rovné smernici dotyčnice ku krivke $v(t)$ v bode určenom daným okamihom. Vzhľadom na to, že pri priamočiarom pohybe je rýchlosť rovná derivácii posunutia, dráhy podľa času, môžeme zrýchlenie a určiť tak, že dané posunutie budeme derivovať dvakrát za sebou, čo môžeme vyjadriť takto

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.22}$$

a hovoríme, že **zrýchlenie je rovné druhej derivácii dráhy** $s(t)$ **podľa času**.
Jednotkou zrýchlenia v sústave SI je m/s^2. Zrýchlenie má veľkosť aj smer, je teda vektorovou veličinou.

3.2.3 Rovnomerne zrýchlený pohyb

Často sa stretávame s pohybmi, pri ktorých sa rýchlosť mení rovnomerne, čiže zrýchlenie je konštantné. Takýto pohyb nazývane **rovnomerne zrýchlený**. Príkladom takéhoto pohybu môže byť rozbeh auta, vlaku, ale aj pád telesa (za určitých podmienok pri zanedbaní odporu vzduchu). Obdobným spôsobom, ako v prípade rovnomerného pohybu, môžeme aj v prípade nerovnomerného pohybu určiť v a s zo zrýchlenia a rýchlosti.

Aby sme sa dozvedeli, čo platí pre rýchlosť a dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu, pokúsime sa upraviť niektoré z predchádzajúcich vzťahov (3.21) a (3.22). Úpravou vzťahu (3.21) dostávame

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t\ .$$

Integráciou oboch strán rovnice dostaneme

$$\int dv = \int a\,\mathrm{d}t\ .$$

Keďže uvažujeme o konštantnom zrýchlení, môžeme ho vyňať pred integrál

$$\int dv = a\int \mathrm{d}t\ ,$$

a matematickou úpravou predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$v = a\,t + c\ , \tag{3.23}$$

kde c je integračná konštanta, ktorú určíme z počiatočných podmienok pre rýchlosť častice v čase $t = 0\,s$, kedy je rýchlosť $v_x = v_{0x}$. Dosadením tejto hodnoty do predchádzajúceho vzťahu, ktorý platí pre ľubovoľný okamih dostaneme hodnotu integračnej konštanty c

$$v_0 = v(t = 0) = a\,0 + c = c\ .$$

Získanú hodnotu konštanty c dosadíme do vzťahu (3.23) a dostávame

$$v = v_0 + a\,t\ . \tag{3.24}$$

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu je zrýchlenie $a > 0$ a pre spomalený pohyb je $a < 0$ a predchádzajúci vzťah prejde na tvar $v = v_0 - a\,t$.
Podobným spôsobom so znalosťou pravidiel pre integračný počet môžeme odvodiť aj vzťah pre dráhu zo vzťahu (3.11). Úpravou tohto vzťahu dostávame

$$\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t\ .$$

Integráciou tejto rovnice dostaneme

$$\int \mathrm{d}s = \int v\,\mathrm{d}t\ .$$

Z predchádzajúceho výsledku poznáme vzťah pre rýchlosť (3.24), ktorá závisí od času. Jej dosadením za v dostávame

$$\int \mathrm{d}s = \int (v_0 + a\,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Využijeme jednu z vlastností integrálov - aditívnosť, t. j. integrál súčtu je rovný súčtu integrálov. Keďže počiatočná rýchlosť v_0 je konštantná, môžeme ju vyňať pred integrál a následne upraviť

$$\int \mathrm{d}s = v_0 \int \mathrm{d}t + a \int t\,\mathrm{d}t\ .$$

Integráciou oboch strán rovníc dostávame

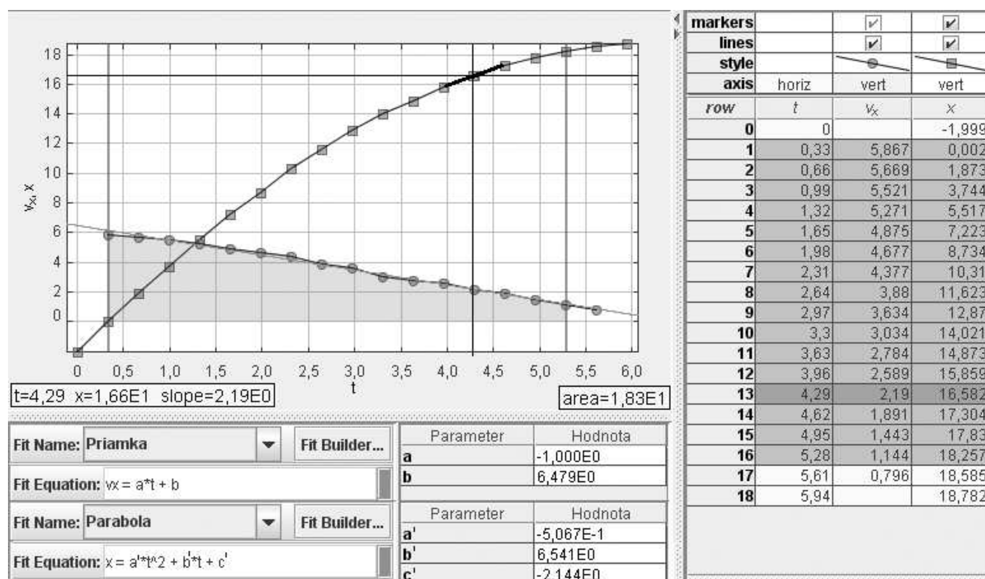
$$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + c'\ ,$$

kde c' je integračná konštanta, ktorú určíme z počiatočných podmienok pre polohu častice (v čase $t = 0\,s$ je $s = s_0$). Dosadením do predchádzajúceho vzťahu zistíme, že hodnota konštanty $c' = s_0$, čiže predchádzajúca rovnica nadobudne tvar

$$s = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 + s_0\ . \tag{3.25}$$

Pokúsme sa teraz z grafov analyzovať pohyb vlaku pri brzdení (obr. 3.7). Ako si môžeme všimnúť z grafu závislosti rýchlosti od času (guľôčky), pohyb vlaku môžeme považovať za rovnomerne spomalený so zrýchlením $a = -1\ m/s^2$. Analyticky môžeme závislosť rýchlosti vlaku od času vyjadriť rovnicou $v(t) = -1\,t + 6,479$, čo napovedá, že v čase, keď sme začali pohyb analyzovať ($t = 0\,s$) mal vlak rýchlosť $v_0 = 6,479\ m/s$. Obsah plochy pod závislosťou rýchlosti od času nás informuje o tom, že za čas $\Delta t = t_{16} - t_1 = 5,28\,s - 0,33\,s$

prešiel vlak dráhu $s = 18,3\,m$ (area $= 18,3$), čo zodpovedá prejdenej dráhe v čase $\Delta t = 5,28\,s - 0,33\,s = 4,95\,s$ ($\Delta s = \Delta x = x_{16} - x_1 = 18,257\,m - 0,002\,m = 18,255\,m \approx 18,3\,m$).



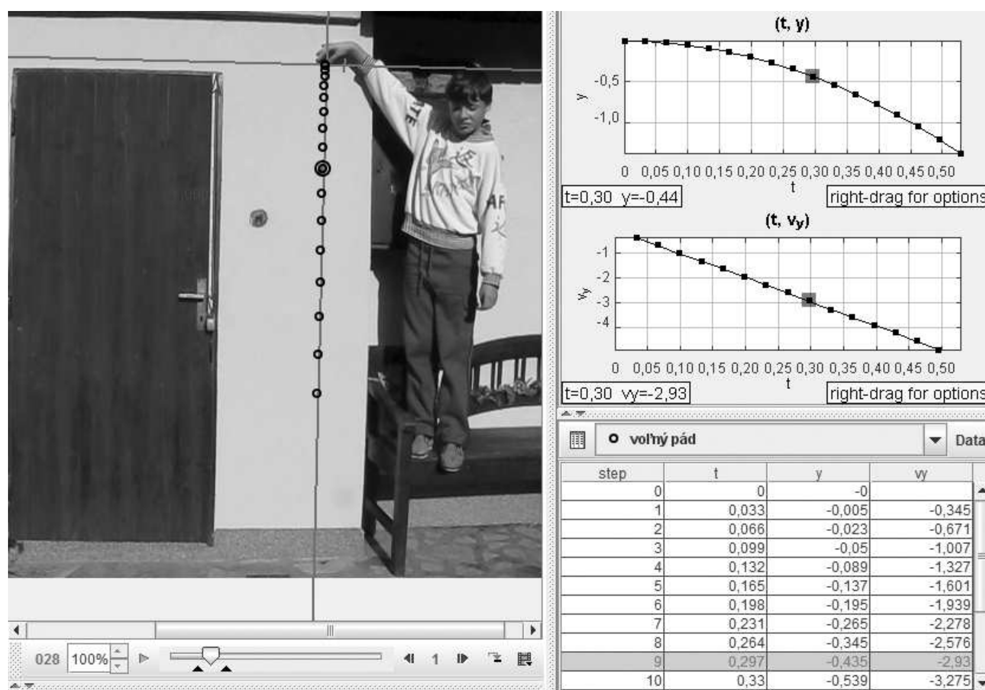
Obrázok 3.7: Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe pri brzdení.

Na obrázku 3.7 je taktiež vykonaná analýza závislosti prejdenej dráhy pri brzdení vlaku od času. Z preloženia nameraných hodnôt najvhodnejšou matematickou funkciou (v tomto prípade parabolou), sme získali parametre $a' = 0,5067$, $b' = 6,54$, $c' = -2,144$. (Tomuto postupu zvykneme hovoriť "fitovanie", alebo "fit" funkciou). Ako z matematickej analýzy daného pohybu vyplýva, závislosť dráhy od času pri brzdení vlaku (štvorčeky) môžeme popísať rovnicou $s = -0,5067\,t^2 + 6,54\,t - 2,144 = -\frac{1}{2}\,1,0134\,t^2 + 6,54\,t - 2,144$. Daný pohyb môžeme teda považovať za rovnomerne spomalený so zrýchlením $a = -1,0134\ m/s^2$ a počiatočnou rýchlosťou $v_0 = 6,54\ m/s$ a počiatočnou polohou $s_0 = -2,144\ m$ (čo zodpovedá analýze predchádzajúceho grafu). V čase $t = 0\,s$ bola poloha vlaku $x_0(t_0 = 0\,s) = -1,999\,m$ (hodnota z tabuľky nameraných hodnôt). Ku grafu závislosti dráhy od času v bode, ktorý zodpovedá hodnote $t_{13} = 4,29\,s$ bola vynesená dotyčnica, ktorej smernica má hodnotu $2,19$ (slope $= 2,19$). Ak túto hodnotu porovnáme s hodnotou rýchlosti v danom čase ($v(t_{13} = 4,29\,s) = 2,19\ m/s$), zistíme, že dané hodnoty sú si navzájom zodpovedajúce. Takýmto spôsobom je možno v ktoromkoľvek čase určiť **okamžitú rýchlosť pohybu vlaku ako smernicu dotyčnice ku**

grafu závislosti dráhy od času.

Deriváciou dráhy podľa času dostaneme funkčnú závislosť rýchlosti a naopak, integráciou rýchlosti dostaneme závislosť dráhy ako funkciu času. Vo všeobecnosti, ak je jedna fyzikálna veličina vyjadrená ako derivácia druhej, tak zase druhú je možné získať integrovaním funkčnej závislosti prvej veličiny. Takýto postup sa nevzťahuje len na riešenie pohybov v kinematike, ale sa uplatňuje prakticky pri vzájomných vzťahoch všetkých fyzikálnych veličín.

Treba však pripomenúť, že odvodené rovnice (3.24), (3.25) platia iba pre rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Symbol s_0 predstavuje dráhu hmotného bodu prejdenú v čase $t = 0\,s$ a rýchlosť v_0 je rýchlosť v čase $t = 0\,s$. V prípade, že zrýchlenie $a = 0\ m/s^2$ potom vzťah (3.25) prejde na tvar (3.18), resp. ak v čase $t = 0\,s$ bola dráha $s_0 = 0\,m$ tak na tvar (3.19), čo sú vzťahy pre rovnomerný priamočiary pohyb hmotného bodu pohybujúceho sa konštantnou rýchlosťou v_0. Tiež, ak zrýchlenie bolo nenulové a počiatočná rýchlosť a dráha bola nulová ($v_0 = 0\ m/s$, $s_0 = 0\,m$), tak dostávame vzťah pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu $s = \frac{1}{2}a\,t^2$.



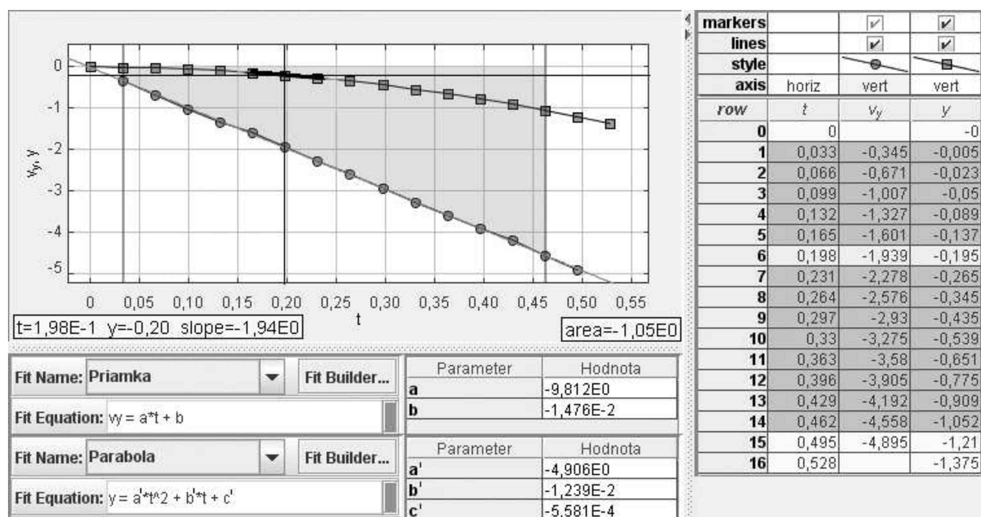
step	t	y	vy
0	0	-0	
1	0,033	-0,005	-0,345
2	0,066	-0,023	-0,671
3	0,099	-0,05	-1,007
4	0,132	-0,089	-1,327
5	0,165	-0,137	-1,601
6	0,198	-0,195	-1,939
7	0,231	-0,265	-2,278
8	0,264	-0,345	-2,576
9	0,297	-0,435	-2,93
10	0,33	-0,539	-3,275

Obrázok 3.8: Analýza pohybu padajúceho telesa.

Obdobným spôsobom, ako bol analyzovaný pohyb vlaku, môžeme urobiť

aj analýzu pohybu padajúceho telesa (obr. 3.8). Keďže padajúca guľôčka sa pohybuje v zápornom smere osi y, hodnoty polohy a rýchlosti v danom smere nadobúdajú záporné hodnoty.

Z analýzy rýchlosti pohybu voľne padajúceho telesa (obr. 3.9) vyplýva, že pohyb voľne pustenej guľôčky môžeme považovať za rovnomerne zrýchlený so záporným zrýchlením $a = -9,812\ m/s^2$. Závislosť rýchlosti od času môžeme charakterizovať rovnicou $v(t) = -9,812\,t - 0,01476$, z obsahu plochy pod grafom závislosti rýchlosti od času vyplýva, že prejdená dráha v danom časovom intervale $\Delta t = t_{14} - t_1 = 0,462\,s - 0,033\,s = 0,429\,s$ je $1,05$ metra (resp. $\Delta s = \Delta y = y_{14} - y_1 =\mid -1,052 - (-0,005) \mid = 1,047\,m$ z nameraných dát v tabuľke).



Parameter	Hodnota
a	-9,812E0
b	-1,476E-2

Parameter	Hodnota
a'	-4,906E0
b'	-1,239E-2
c'	-5,581E-4

row	t	vy	y
0	0		-0
1	0,033	-0,345	-0,005
2	0,066	-0,671	-0,023
3	0,099	-1,007	-0,05
4	0,132	-1,327	-0,089
5	0,165	-1,601	-0,137
6	0,198	-1,939	-0,195
7	0,231	-2,278	-0,265
8	0,264	-2,576	-0,345
9	0,297	-2,93	-0,435
10	0,33	-3,275	-0,539
11	0,363	-3,58	-0,651
12	0,396	-3,905	-0,775
13	0,429	-4,192	-0,909
14	0,462	-4,558	-1,052
15	0,495	-4,895	-1,21
16	0,528		-1,375

Obrázok 3.9: Analýza rýchlosti pohybu padajúceho telesa.

Závislosť dráhy od času voľne padajúceho telesa (obr. 3.9) môžeme popísať rovnicou $s(t) = y(t) = -4,906\,t^2 - 0,01239\,t - 0,0005581$, čo môžeme prepísať do tvaru $s(t) = y(t) = -\frac{1}{2}\,9,812\,t^2 - 0,01239\,t - 0,0005581$. Pohyb voľne pustenej guľôčky (v krátkom časovom intervale, kedy ešte môžeme zanedbať odpor vzduchu) môžeme opäť podľa predchádzajúcej analýzy považovať za rovnomerne zrýchlený so záporným zrýchlením $a = -9,812\ m/s^2$. Zistením smernice dotyčnice ku grafu závislosti dráhy od času v čase $t_6 = 0,198\,s$, bola určená hodnota okamžitej rýchlosti $v(0,198\,s) = -1,94\ m/s$, čo zodpovedá hodnote určenej z tabuľky $v_{y6} = -1,939\ m/s$.

Voľný pád je špeciálnym prípadom pohybu, kde $\vec{a} = \vec{g}$. Pri voľnom páde

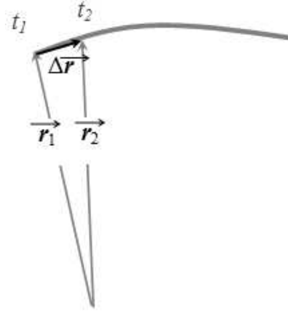
telesa v blízkosti zemského povrchu sa rýchlosť zvyšuje so stálym zrýchlením $\vec{g}$.

$$1\,g = 9,80665\ m/s^2 \approx 9,81\ m/s^2\ .$$

Táto hodnota bola prijatá ako **normálne tiažové zrýchlenie** na druhej generálnej konferencii pre váhy a miery v roku 1901. Zodpovedá severnej zemepisnej šírke 45° na úrovni mora.

Rovnice popisujúce rovnomerne zrýchlený pohyb platia pre zvislý vrh v blízkosti zemského povrchu (ak je odpor vzduchu zanedbateľný), t. j. do výšok zanedbateľne malých oproti zemskému polomeru, teda $h \ll 6 \times 10^3\ km$. (Viac sa o tomto pohybe dozvieme v kapitole Gravitačné pole.)

3.3 Trojrozmerný pohyb



Obrázok 3.10: Zmenšenie časového intervalu.

Po predchádzajúcej analýze pohybu v jednom smere (na priamke) možno naše úvahy rozšíriť na pohyb, ktorý sa uskutočňuje vo všetkých troch smeroch. Najdôležitejšie pojmy týkajúce sa popisu pohybu budú analogické s tými, ktoré sme odvodili v predchádzajúcich častiach, avšak rozšírené za pomoci vektorovej algebry do všetkých troch smerov priestoru.
Podiel

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_p\ , \qquad (3.26)$$

definuje **priemernú rýchlosť** hmotného bodu na úseku z miesta A do miesta B. Z obrázku 3.3 je zrejmé, že nepriamočiara trajektória pohybu hmotného bodu sa vektorom $\Delta\vec{r}$ nedá presne popísať. Pre presnejšie popísanie je nutné časové intervaly skracovať (obr. 3.10). Potom aj vektor $\Delta\vec{r}$ presnejšie popisuje

úsek trajektórie a približuje sa dotyčnici ku krivke trajektórie v mieste jeho počiatku.
Matematicky môžeme zmenšovanie časového intervalu vyjadriť pomocou limity a následnej derivácie polohového vektora podľa času

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \, . \tag{3.27}$$

Rýchlosť $\vec{v}$ je v tomto vyjadrení okamžitou rýchlosťou hmotného bodu v čase t a smer rýchlosti má smer dotyčnice ku trajektórii pohybu. Vzťah (3.27) je analógiou vzťahu (3.11), ale zároveň je jeho zovšeobecnením pre pohyby v trojrozmernom priestore. Zavedené veličiny $\mathrm{d}\vec{r}$ a $\mathrm{d}t$ sú elementárnym vyjadrením polohového vektora a času.

Pre trojrozmerný súradnicový systém s vektorom $\vec{r}$ určeným pomocou troch zložiek (3.1) prejde vzťah pre rýchlosť (3.11) do tvaru

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \, . \tag{3.28}$$

Ak zavedieme veľkosti zložiek vektora rýchlosti pre jednotlivé smery

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \; v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \; v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \, , \tag{3.29}$$

následne dostávame pre celkovú rýchlosť

$$\vec{v} = v_x \, \vec{i} + v_y \, \vec{j} + v_z \, \vec{k} \, . \tag{3.30}$$

Veľkosť rýchlosti je určená absolútnou hodnotou

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \, . \tag{3.31}$$

V prípade pohybu hmotného bodu rýchlosťou v_0 len v jednom smere, napr. v smere osi x sú zložky rýchlosti v ostatných smeroch $v_y = v_z = 0 \; m/s$. Potom vo vzťahu (3.28) pre zložku rýchlosti nahrádzame $v_x = v_0$ a zložku vektora x môžeme nahradiť dráhou s. Dostávame tak skalárny vzťah pre rýchlosť priamočiareho pohybu vyjadrený ako deriváciu dráhy podľa času, čo je vzťah (3.11).

Pre priemernú rýchlosť priamočiareho pohybu potom dostaneme vzťah analogický so vzťahom (3.10) s tým, že polohový vektor je nahradený dráhou

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{v}_p \, . \tag{3.32}$$

Predpokladajme v ďalšom, že rýchlosť pohybu nezostáva konštantná ako v prípade rovnomerného pohybu, ale sa mení s časom. Takýto pohyb sme označili ako nerovnomerný. Nech sa hmotný bod v čase t_1 pohybuje rýchlosťou v_1 a v čase t_2 rýchlosťou v_2. Pomer zmeny rýchlosti v časovom intervale vyjadruje zrýchlenie už definované vzťahom (3.21). Avšak vzťah (3.21) je opäť definíciou zrýchlenia len pre prípad priamočiareho pohybu. Pre zovšeobecnenie definície zrýchlenia v priestore je potrebné upraviť vzťah pre trojrozmerný súradnicový systém. Ak uvážime trojrozmerný súradnicový systém s vektorom $\vec{r}$ určeným pomocou troch zložiek (3.1), potom zrýchlenie môžeme vyjadriť s využitím vzťahu (3.21) analogicky, ako sme to urobili pre rýchlosť v predchádzajúcej časti

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\,. \tag{3.33}$$

Ak uvážime vzťahy pre veľkosti zložiek rýchlosti (3.29), tak zrýchlenie je možné vyjadriť ako druhú deriváciu polohového vektora podľa času

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{k}\,. \tag{3.34}$$

Veľkosti zložiek vektora zrýchlenia zavedieme takto

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},\ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \tag{3.35}$$

a pre celkové zrýchlenie potom dostávame

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\,. \tag{3.36}$$

Veľkosť zrýchlenia je určená absolútnou hodnotou

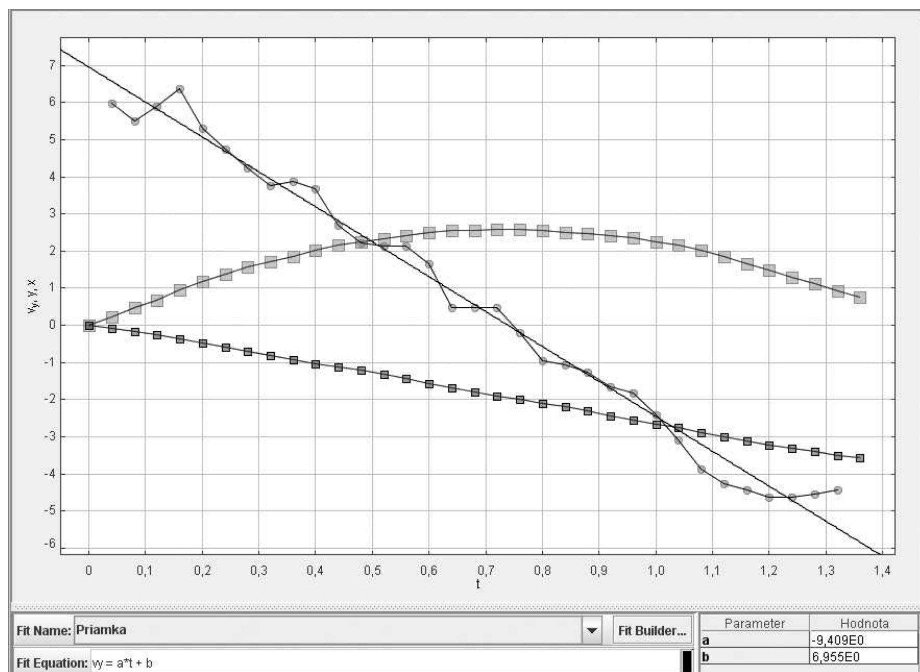
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{3.37}$$

V prípade priamočiareho pohybu orientovaného v smere osi x ostatné zložky zrýchlenia sú nulové a vzťah pre zrýchlenie prejde na skalárny tvar analogický vzťahu (3.21)

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \tag{3.38}$$

Vráťme sa ešte na koniec tejto časti k analýze pohybu vodného lúča fontány, ktorý urobíme v rovine x, y (v smere osi z sa daný pohyb nerealizuje). Skúsme teraz spoločne analyzovať pohyb začiatku vodného lúča v týchto dvoch rôznych smeroch - x, y. Ako si môžeme všimnúť zo závislosti $x(t)$ a $y(t)$ (obr. 3.1), pohyb v smere osi x je rovnomerný a v smere osi y je nerovnomerný - na začiatku

spomalený a v druhej časti deja zrýchlený. (Prečo je tomu tak, dozvieme sa v ďalších kapitolách pri skúmaní príčin pohybu - v dynamike a pri pohyboch telies v gravitačnom poli Zeme (pôsobiaca sila, ktorá ovplyvňuje pohyb, pôsobí iba v jednom smere). Keďže poloha začiatku vodného lúča v smere osi x rovnomerne klesá (menšie štvorčeky), závislosť polohy x od času môžeme približne charakterizovať rovnicou $x(t) = -2,7\,t + 0,052$, (pre rýchlosť platí $v_x = 2,7\,m/s$, znamienko - hovorí o pohybe v zápornom smere osi x). Poloha vodného lúča v smere osi y najprv narastá, potom sa zmenšuje (väčšie štvorčeky), preto pohyb v tomto smere považujeme za nerovnomerný. Matematickou analýzou ho možno popísať vzťahom $y(t) = -\frac{1}{2}\,9,67\,t^2 + 7,13\,t - 0,0054$,



Obrázok 3.11: Analýza pohybu vodného lúča fontány.

z čoho vyplýva, že zrýchlenie tohto pohybu je konštantné a smeruje dole v zápornom smere osi y, t. j. $a_y = -9,67\ m/s^2 \approx -g$. Rýchlosť pohybu v danom smere možno charakterizovať rovnicou $v_y(t) = 6,96 - 9,41\,t$, pričom z daného vyjadrenia a grafickej závislosti $v_y(t)$ (guľôčky) vyplýva, že pri stúpaní vodného lúča je rýchlosť kladná a zmenšuje sa z rýchlosti približne $v_y(0) \approx 7\ m/s$ až na nulu ($v_y(0,74\,s) = 0\ m/s$) a potom veľkosť (zápornej) rýchlosti narastá.

3.4 Krivočiary pohyb, pohyb po kružnici

V prechádzajúcej časti boli odvodené vzťahy pre prípad rovnomerného a rovnomerne zrýchleného pohybu. Trajektória takéhoto pohybu bola časť priamky. Tieto vzťahy boli potom zovšeobecnené na pohyb v priestore s použitím vektorového zápisu. Ak zavedieme jednotkový vektor $\vec{\tau}$ orientovaný v smere dotyčnice ku krivke, môžeme potom rýchlosť vyjadriť ako skalárny násobok veľkosti rýchlosti v a jednotkového vektora $\vec{\tau}$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = v\,\vec{\tau}\,. \tag{3.39}$$

Analýzou vzťahu (3.39) podľa skalárnej veličiny v dostávame nasledujúce druhy pohybov podľa veľkosti rýchlosti:

- $v =$ konštanta, $\Rightarrow$ rovnomerný pohyb,
- $v \neq$ konštanta, $\Rightarrow$ nerovnomerný pohyb,

a rozborom z pohľadu vektora $\vec{\tau}$ vystihujúceho smer pohybu dostávame ďalšie rozdelenie:

- $\vec{\tau} =$ konštanta, $\Rightarrow$ priamočiary pohyb,
- $\vec{\tau} \neq$ konštanta, $\Rightarrow$ krivočiary pohyb

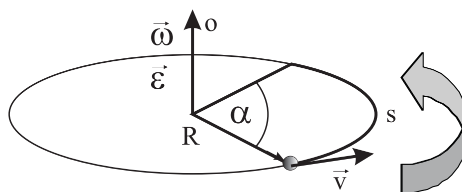
Kombináciou týchto možností získame štyri základné druhy pohybu, rovnomerný priamočiary, rovnomerný krivočiary, nerovnomerný priamočiary, nerovnomerný krivočiary. Na popis priamočiarych pohybov vystačíme s jednorozmerným súradnicovým systémom, kým v prípade krivočiarych pohybov je potrebný popis s dvoma súradnicami pre pohyby v rovine, resp. troma súradnicami pre pohyby v priestore. Predmetom tejto kapitoly bude rozbor z pohľadu smeru pohybu.

Veľká variabilita krivočiarych pohybov neumožňuje univerzálnym spôsobom popísať všetky krivočiare pohyby, a preto sa v tejto kapitole naša pozornosť zúži len na špeciálny prípad krivočiareho pohybu, konkrétne prípad pohybu po kružnici, ktorý taktiež nazývame **otáčavý** alebo **rotačný pohyb**. Analogicky s priamočiarym pohybom (patrí medzi **posuvné (translačné) pohyby**), ktorý je charakterizovaný polohovým vektorom $\vec{r}$, rýchlosťou $\vec{v}$ a zrýchlením $\vec{a}$ môžeme aj pohyb po kružnici charakterizovať orientovaným uhlom $\vec{\alpha}$, vektorom uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ a vektorom uhlového zrýchlenia $\vec{\varepsilon}$. Kým v prípade

priamočiareho pohybu sme mohli s dráhou, rýchlosťou a zrýchlením pracovať ako so skalárnymi veličinami, tak v prípade pohybu po kružnici sú spomínané veličiny vektormi.

Uvažujme teraz o pohybe hmotného bodu, ktorý sa otáča okolo pevnej osi (obr. 3.12). Každý bod kružnice opisuje pri otáčavom pohybe za daný čas rovnaký uhol. (Naproti tomu pri posuvnom pohybe všetky body telesa sa pohybujú po trajektóriách rovnakého tvaru, napr. po priamkach pri priamočiarom pohybe a v danom časovom intervale prejdú rovnakú vzdialenosť.) Uhol α predstavuje uhol, ktorý opíše sprievodičom rotujúceho hmotného bodu so stredom kruhovej trajektórie za čas t. Ak poznáme dĺžku oblúka s opísaného sprievodičom hmotného bodu, ktorú hmotný bod za čas t urazil a polomer kružnice, po ktorej sa pohybuje je R, pre veľkosť uhla α platí

$$\alpha = \frac{s}{R} \, . \tag{3.40}$$



Obrázok 3.12: Pohyb po kružnici s charakterizáciou základných veličín.

Hodnoty takto definovaného uhla sa udávajú v oblúkovej miere, t. j. v radiánoch (rad). Niekedy sa však môžeme stretnúť aj so zadaním uhla v stupňoch alebo otáčkach, pričom platí prevod

$$1\,\text{otáčka} = 360^\circ = \frac{2\,\pi\,R}{R} = 2\,\pi\,\text{rad} \, , \tag{3.41}$$

odtiaľ potom dostávame

$$1\,\text{rad} = 57,3^\circ = 0,159\,\text{otočky} \, . \tag{3.42}$$

Ak teraz chceme skúmať otáčavý pohyb, znamená to skúmať časovú závislosť uhla otočenia hmotného bodu, čiže $\alpha = \alpha(t)$. Ak sa uhol otočenia hmotného bodu v čase t mení z hodnoty $\alpha_1(t_1)$ na hodnotu $\alpha_2(t_2)$, potom pod **otočením** hmotného bodu v čase $t = t_2 - t_1$ rozumieme v danom časovom

intervale veličinu $\Delta\alpha$, ktorá je definovaná vzťahom

$$\Delta\alpha(t) = \alpha_2(t_2) - \alpha_1(t_1) \ . \qquad (3.43)$$

Otočenie $\Delta\alpha$ rotujúceho hmotného bodu nadobúda kladné hodnoty, ak sa daný bod otáča v smere rastúceho uhla, t. j. proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Pri otáčaní v smere klesajúcich hodnôt uhla otočenia nadobúda záporné hodnoty. (Otočenie v zmysle vektorovej algebry nie je vektorovou veličinou, pretože skladanie otočení nie je komutatívne (pri zmene poradia dvoch otočení knihy o uhol 90° v rôznych smeroch nedostaneme knihu do tej istej polohy). Pri infinitezimálnych (nekonečne malých) otočeniach $\mathrm{d}\alpha$ však môže byť pokladané za vektorovú veličinu.)

Nech v čase t_1 je uhol otočenia hmotného bodu α_1 a v čase t_2 je uhol otočenia α_2. **Priemerná uhlová rýchlosť** hmotného bodu v časovom intervale $\Delta t = t_2 - t_1$ je definovaná vzťahom

$$\overline{\omega} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \ , \qquad (3.44)$$

kde $\Delta\alpha$ predstavuje otočenie hmotného bodu v časovom intervale Δt.

Okamžitá uhlová rýchlosť ω je limitou priemernej uhlovej rýchlosti vyjadrenej vzťahom (3.44) pri zmenšovaní veličiny Δt k nulovej hodnote, t. j.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \ . \qquad (3.45)$$

Jednotkou uhlovej rýchlosti je rad/s (alebo $1\,s^{-1}$, prípadne otáčky/s). V prípade, že uhlová rýchlosť rotujúceho bodu nie je konštantná, daný bod má nenulové uhlové zrýchlenie. Ak uhlová rýchlosť v čase t_1 je ω_1 a v čase t_2 je ω_2, potom **priemerné uhlové zrýchlenie** hmotného bodu v časovom intervale Δt je definované vzťahom

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \ , \qquad (3.46)$$

kde $\Delta\omega$ predstavuje zmenu uhlovej rýchlosti hmotného bodu v danom časovom intervale Δt. **Okamžité uhlové zrýchlenie** ε je limitou priemerného uhlového zrýchlenia pri zmenšovaní Δt k nulovej hodnote, t. j.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \ . \qquad (3.47)$$

Jednotkou uhlového zrýchlenia je rad/s^2 (alebo $1\,s^{-2}$, prípadne otáčky/s^2).

Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie sú vektorové veličiny, to znamená, že vzťahy (3.45) a (3.47) môžeme zapísať aj vo vektorovom tvare, pričom orientácia vektorov $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ je totožná a je určená podľa pravidla pravej ruky (obr. 3.12). Vektory majú smer kolmý na rovinu danú pohybom s orientáciou nahor, resp. nadol v závislosti od smeru pohybu hmotného bodu.

Okrem týchto veličín môže byť pohyb po kružnici popísaný aj pomocou obvodovej rýchlosti $\vec{v}$. Smer vektora obvodovej rýchlosti je dotyčnica ku kružnici v danom mieste, čiže sa nachádza v rovine kružnice.

Podobným spôsobom ako v prípade priamočiareho pohybu môžeme odvodiť vzťah pre uhol a uhlovú rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici. V takom prípade je zrýchlenie ε konštantné, smery vektorov uhlového zrýchlenia a uhlovej rýchlosti sú zhodné a vzťah (3.47) sa dá prepísať takto

$$\mathrm{d}\omega = \varepsilon \, \mathrm{d}t \; . \tag{3.48}$$

Uhlová rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu je potom po zintegrovaní vzťahu (3.48) daná zápisom

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \, t \; . \tag{3.49}$$

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici je zrýchlenie $\varepsilon > 0$ a pre spomalený pohyb je $\varepsilon < 0$. Pre vyjadrenie opísaného uhla rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici využijeme základný vzťah pre vyjadrenie uhla (3.45) a použijeme odvodený vzťah (3.49). Následne dostaneme

$$\int \mathrm{d}\alpha = \int (\omega_0 + \varepsilon \, t) \, \mathrm{d}t \; ,$$

a ďalším zintegrovaním dostávame pre uhol rovnomerne zrýchleného pohybu vzťah

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 \, t + \frac{1}{2} \varepsilon \, t^2 \; . \tag{3.50}$$

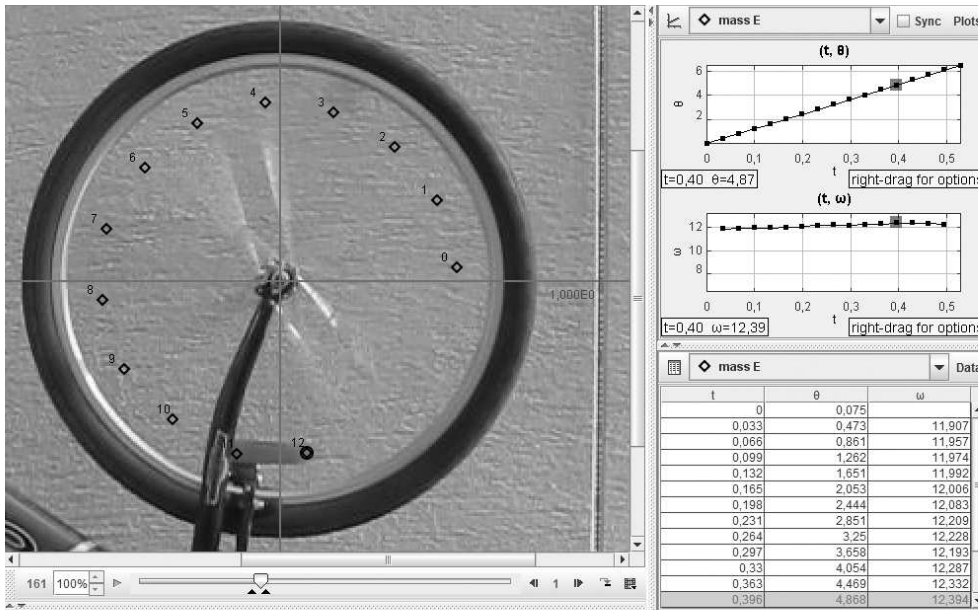
Tento vzťah je všeobecným vyjadrením uhla rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici. Symboly α_0 a ω_0 predstavujú uhol natočenia a uhlovú rýchlosť v čase $t = 0\,s$. Vo všetkých predchádzajúcich vzťahoch je vidieť analógiu veličín a vzťahov s priamočiarym pohybom, na čo poukazuje aj tabuľka 3.1.

Pokúsme sa teraz spoločne tak ako v predchádzajúcej časti analyzovať pohyb hmotného bodu po kružnici. Na obrázku 3.13 je zaznamenaný pohyb odrazového sklíčka na kolese bicykla. Matematickou analýzou grafov daných

Tabuľka 3.1: Analógia veličín a vzťahov pre pohyb po kružnici a priamočiary pohyb

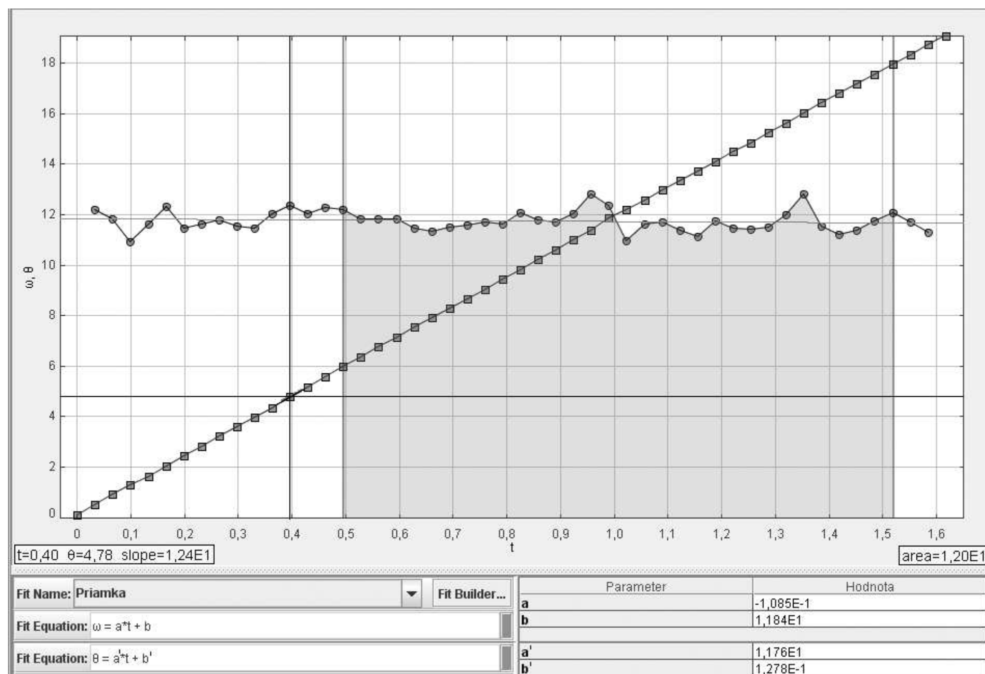
Pohyb po kružnici	Priamočiary pohyb
$\vec{\alpha}$	$\vec{r}\,(s)$
$\vec{\omega}$	$\vec{v}$
$\vec{\varepsilon}$	$\vec{a}$
$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$
$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$
$\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t$	$v = v_0 + a\, t$
$\alpha = \omega_0\, t + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, t^2$	$s = v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$
$\alpha = \alpha_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, t^2$	$s = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$

pohybov (obr. 3.14) môžeme usúdiť s istou presnosťou, že ide o rovnomerný otáčavý pohyb. Z analýzy vyplynulo, že veľkosť priemernej uhlovej rýchlosti je $\omega = 11,8\ rad/s$. Uhol otočenia v čase t môžeme popísať rovnicou $\alpha = \theta = 11,8\,t + 0,127$. Obdobnou analýzou ako v predchádzajúcom prípade analýzy priamočiarych pohybov môžeme určiť uhol otočenia v istom časovom okamihu ako obsah plochy pod grafom závislosti uhlovej rýchlosti v danom časovom okamihu (obr. 3.14 - obsah vyznačenej plochy je $12\,rad$, čo zodpovedá uhlu otočenia vo vyznačenom časovom intervale $\Delta\alpha = \Delta\theta = (18-6)\,rad = 12\,rad$.)



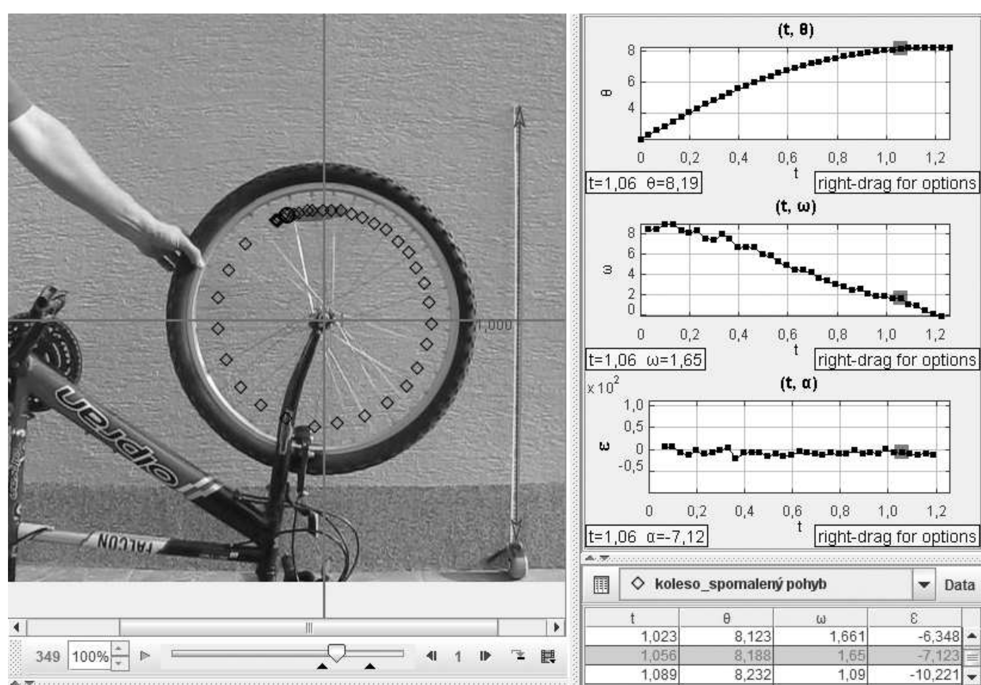
Obrázok 3.13: Analýza pohybu odrazového sklíčka na kolese bicykla.

Analýzou grafu závislosti uhla otočenia od času možno v ktoromkoľvek okamihu určiť uhlovú rýchlosť ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (obr. 3.14 - v čase $t = 0,40\,s$ má smernica dotyčnice hodnotu $12,4\ rad/s$, čo zodpovedá uhlovej rýchlosti v danom čase určenej z meraní: $\omega(0,40\,s) = 12,385\ rad/s$).



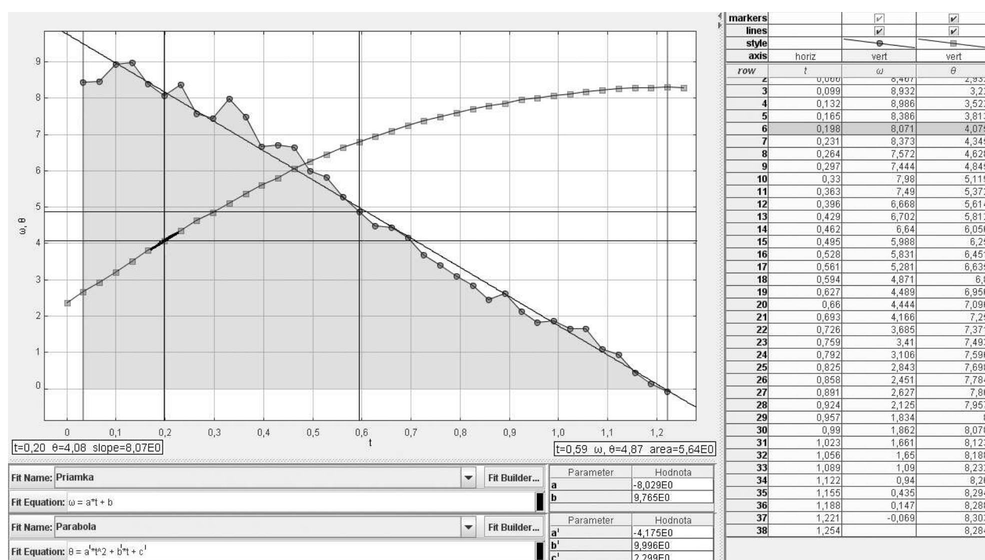
Obrázok 3.14: Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčeky) od času a ich fit priamkou.

Na obrázku 3.15 je znázornená analýza pohybu odrazového sklíčka na kolese bicykla pri jeho brzdení. Detailnejšou analýzou časových závislosti možno usúdiť (obr. 3.16), že ide o rovnomerne spomalený otáčavý pohyb, ktorý možno popísať rovnicami $\omega(t) = -8,029\,t + 9,765$ a $\alpha(t) = \theta(t) = -\frac{1}{2}\,8,35\,t^2 + 9,996\,t + 2,299$, pričom veľkosť uhlového spomalenia je približne rovná $\varepsilon \approx 8\ rad/s^2$ a uhlová rýchlosť na začiatku brzdenia kolesa mala hodnotu približne $\omega \approx 10\ rad/s$. Aj v prípade tohto pohybu možno v ktoromkoľvek okamihu určiť uhlovú rýchlosť ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (obr. 3.16 - v čase $t = 0,20\,s$ má smernica dotyčnice hodnotu $8,07\ rad/s$, čo zodpovedá uhlovej rýchlosti v danom čase určenej z tabuľky ($\omega(0,20s) = 8,071\ rad/s$)).



t	θ	ω	ε
1,023	8,123	1,661	-6,348
1,056	8,188	1,65	-7,123
1,089	8,232	1,09	-10,221

Obrázok 3.15: Analýza pohybu odrazového sklíčka pri brzdení kolesa.



Parameter	Hodnota
a	-8,029E0
b	9,765E0

Parameter	Hodnota
a'	-4,175E0
b'	9,996E0
c'	2,299E0

row	t	ω	θ
3	0,099	8,932	3,22
4	0,132	8,986	3,522
5	0,165	8,386	3,813
6	0,198	8,071	4,075
7	0,231	8,373	4,345
8	0,264	7,572	4,628
9	0,297	7,444	4,845
10	0,33	7,98	5,119
11	0,363	7,49	5,372
12	0,396	6,668	5,614
13	0,429	6,702	5,812
14	0,462	6,64	6,056
15	0,495	5,988	6,25
16	0,528	5,831	6,451
17	0,561	5,281	6,635
18	0,594	4,871	6,8
19	0,627	4,489	6,956
20	0,66	4,444	7,096
21	0,693	4,166	7,25
22	0,726	3,685	7,371
23	0,759	3,41	7,493
24	0,792	3,106	7,596
25	0,825	2,843	7,698
26	0,858	2,451	7,784
27	0,891	2,627	7,86
28	0,924	2,125	7,957
29	0,957	1,834	8
30	0,99	1,862	8,078
31	1,023	1,661	8,123
32	1,056	1,65	8,188
33	1,089	1,09	8,232
34	1,122	0,94	8,26
35	1,155	0,435	8,294
36	1,188	0,147	8,288
37	1,221	-0,069	8,303
38	1,254		8,284

Obrázok 3.16: Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčeky) od času.

Uhol otočenia v danom časovom intervale bol určený ako obsah plochy pod krivkou závislosti uhlovej rýchlosti na čase (obr. 3.16) - obsah vyznačenej plochy je $5,64\,rad$, čo zodpovedá uhlu otočenia vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{37} - t_1 = 1,221\,s - 0,033\,s = 1,188\,s$: $\Delta\alpha = \Delta\theta = \theta_{37} - \theta_1 = 8,303\,rad - 2,661\,rad = 5,642\,rad$).

3.4.1 Vzťah obvodovej a uhlovej rýchlosti

Na odvodenie vzťahu, ktorý vyjadruje vzájomný súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou, použijeme základnú definíciou uhlovej rýchlosti (3.45) a súvis medzi opísaným uhlom α a prejdenou dráhou, ktorú v tomto prípade predstavuje oblúk s (3.40).
Dosadením rovnosti (3.40) za α do vzťahu (3.45) dostávame

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{s}{R}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\,, \tag{3.51}$$

kde $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ je už známa definícia okamžitej rýchlosti posuvného pohybu. Po dosadení dostávame vzťah medzi uhlovou a obvodovou rýchlosťou v skalárnom tvare

$$\omega = \frac{v}{R}\,. \tag{3.52}$$

(Ešte elegantnejšie je možné dopracovať sa k tomuto vzťahu priamo deriváciou vzťahu (3.40) podľa času, čo už ponechávame na samotnom čitateľovi.)
Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že aj keď sa všetky časti telesa otáčajúceho sa okolo vlastnej osi otáčajú rovnakou uhlovou rýchlosťou, častice telesa, ktoré obiehajú vo väčšej vzdialenosti R od osi otáčania, pohybujú sa aj väčšou obvodovou rýchlosťou v. Predchádzajúci vzťah však nevystihuje smer rýchlostí, hovorí iba o veľkosti obvodovej rýchlosti. Smer vektorov vyplýva priamo z obrázku 3.12. Vo vektorom tvare je výsledný vzťah charakterizujúci súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou daný zápisom

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}\,. \tag{3.53}$$

Z daného vzťahu vyplýva, že zmenou smeru pohybu hmotného bodu po kružnici v opačnom smere ako je načrtnuté na obrázku 3.12 sa zmení aj smer vektora uhlovej rýchlosti smerom nadol.

3.4.2 Perióda a frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici

V prípade rovnomerného otáčavého pohybu telesa po kružnici stálou uhlovou rýchlosťou je podľa vzťahu (3.52) časovo nepremenná i obvodová rýchlosť každej častice telesa. Vtedy vykoná každý hmotný bod telesa jeden obeh po kružnici za rovnaký časový interval. **Čas, za ktorý vykoná hmotný objekt jeden obeh po kružnici rovnomerným pohybom sa nazýva perióda (T)**. Doba obehu je pre všetky častice otáčajúceho sa telesa rovnaká. Jednotkou periódy je $1\,s$. Perióda je vyjadrená vzťahom

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v}\,, \tag{3.54}$$

z ktorého je zrejmé, že je podielom dĺžky kruhovej trajektórie hmotného bodu ($2\,\pi\,R$) a jej obvodovej rýchlosti v. Po dosadení vzťahu (3.52) do tejto rovnice dostaneme

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}\,. \tag{3.55}$$

Okrem periódy sa pre rovnomerné pohyby po kružnici zavádza aj ďalšia fyzikálna veličina **frekvencia** (f). **Frekvencia je definovaná ako počet obehov hmotného bodu rovnomerným pohybom po kružnici za jednotku času**. Matematicky je vyjadrená ako prevrátená hodnota periódy

$$f = \frac{1}{T}\,. \tag{3.56}$$

Jednotkou frekvencie je $1\,s^{-1} = 1\,Hz$ (hertz). Pomocou týchto zavedených veličín je možné vyjadriť uhlovú rýchlosť. Keďže perióda a frekvencia popisujú zväčša rovnomerné pohyby, tak aj vzťah pre uhlovú rýchlosť (3.45) sa môže zjednodušiť

$$\omega = \frac{\alpha}{t}\,. \tag{3.57}$$

Jeden obeh po kružnici zodpovedá uhlu $\alpha = 2\,\pi$ a čas $t = T$. Po dosadení vzťah (3.57) prejde na tvar

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T}\,, \tag{3.58}$$

alebo po dosadení vzťahu (3.56) na tvar

$$\omega = 2\,\pi\,f\,. \tag{3.59}$$

3.4.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie

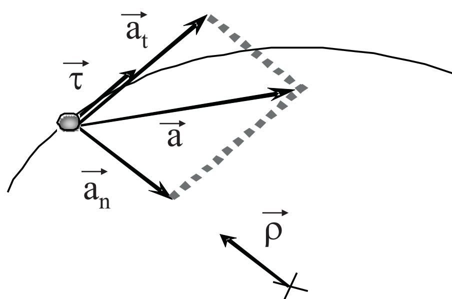
Podľa základnej definície zrýchlenia v priestore (3.33) je zrýchlenie vektorová veličina vyjadrená ako časová zmena vektora rýchlosti. Ak dôjde k časovej zmene rýchlosti je potom zrýchlenie nenulové. Táto zmena rýchlosti môže byť reprezentovaná buď zmenou jej veľkosti alebo jej smeru. V predchádzajúcej kapitole sme analyzovali priamočiary pohyb, pričom sme neuvažovali o zmene smeru rýchlosti. V prípade pohybu po kružnici sa však táto zmena smeru rýchlosti nedá zanedbať. Zmenu smeru rýchlosti bude popisovať **normálové (radiálne) zrýchlenie** $\vec{a}_n$ a zmenu jej veľkosti **tangenciálne zrýchlenie** $\vec{a}_t$.

Ich orientáciu na kružnici znázorňuje obrázok 3.17. Kým vektor tangenciálneho zrýchlenia $\vec{a}_t$ je dotyčnicou ku kruhovej trajektórii pohybu v danom mieste, tak vektor normálového zrýchlenia $\vec{a}_n$ má smer do stredu kružnice. Celkové zrýchlenie potom môžeme vyjadriť ako vektorový súčet obidvoch zrýchlení

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \ , \tag{3.60}$$

alebo v prípade určenia len veľkosti celkového zrýchlenia

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \ , \tag{3.61}$$



Obrázok 3.17: Náčrt tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia.

Odvoďme teraz vzťahy pre tangenciálne a normálové zrýchlenie, pričom využijeme všeobecnú definíciu zrýchlenia v priestore (3.33) a použijeme prepis vektora rýchlosti ako súčin veľkosti rýchlosti vyjadrenej skalárom v a smeru charakterizovanom jednotkovým vektorom (3.39)

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\,\vec{\tau})}{\mathrm{d}t} \ . \tag{3.62}$$

Podľa pravidiel pre derivovanie súčinu je možné upraviť predchádzajúci vzťah (3.62) na nasledujúci tvar

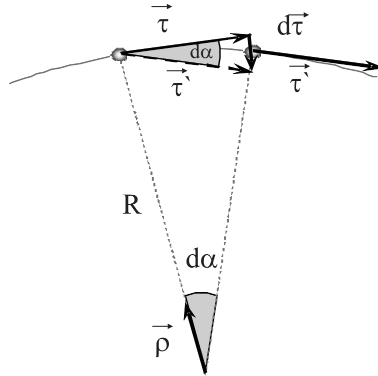
$$\vec{a} = \frac{dv}{\mathrm{d}t}\,\vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}\ . \tag{3.63}$$

Prvá časť vzťahu (3.63) charakterizuje zmenu veľkosti rýchlosti, a teda predstavuje tangenciálnu zložku zrýchlenia, pričom za rýchlosť môžeme dosadiť vzťah (3.52), ε predstavuje uhlové zrýchlenie. Druhá časť vyjadruje zmenu smeru rýchlosti a predstavuje normálovú zložku zrýchlenia

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{\mathrm{d}t}\,\vec{\tau} = R\,\frac{d\omega}{dt}\,\vec{\tau} = R\,\varepsilon\,\vec{\tau}\ , \tag{3.64}$$

$$\vec{a}_n = v\,\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}\ . \tag{3.65}$$

Určenie tangenciálneho zrýchlenia podľa vzťahu (3.64) je potom analogické určeniu zrýchlenia priamočiareho pohybu. Zložitejšie je určenie normálovej zložky zrýchlenia podľa vzťahu (3.65), kde je potrebné podrobnejšie rozanalyzovať zmenu smeru. Na tento účel využijeme náčrt na obrázku 3.18.



Obrázok 3.18: Analýza pohybu bodu po kružnici - k odvodeniu normálového zrýchlenia.

Pre vyjadrenie zmeny smeru rýchlosti budeme charakterizovať smer rýchlosti v krátkom časovom intervale vektorom $\vec{\tau}$ na začiatku časového intervalu a smer rýchlosti vektorom $\vec{\tau}'$ na konci časového intervalu. Zmena smeru je potom vyjadrená rozdielom týchto vektorov

$$\mathrm{d}\vec{\tau} = \vec{\tau}' - \vec{\tau}\ . \tag{3.66}$$

Ramená spájajúce stred kružnice s polohami hmotného bodu zvierajú uhol $\mathrm{d}\vec{\alpha}$. Ten istý uhol je možné nájsť v trojuholníku, ktorý tvoria vektory $\vec{\tau}$ a $\vec{\tau}'$. Pre malé uhly platí

$$|\mathrm{d}\vec{\tau}| = |\mathrm{d}\vec{\alpha}| \,. \tag{3.67}$$

Po dosadení za uhol α zo vzťahu (3.67) dostávame

$$|\mathrm{d}\vec{\tau}| = \frac{\mathrm{d}s}{R} \,. \tag{3.68}$$

Z obrázku 3.18 je zrejmé, že smer vektora $\mathrm{d}\vec{\tau}$ je opačný k smeru jednotkového vektora $\vec{\rho}$. Vektor $\mathrm{d}\vec{\tau}$ potom môžeme vyjadriť nasledujúco

$$\mathrm{d}\vec{\tau} = -\frac{\mathrm{d}s}{R}\vec{\rho} \,. \tag{3.69}$$

Do vzťahu pre normálové zrýchlenie (3.65) dosadíme vzťah (3.69) a po úprave dostaneme

$$\vec{a}_n = -\frac{v}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\rho} = -\frac{v^2}{R}\vec{\rho} \,. \tag{3.70}$$

Pre celkové zrýchlenie s dosadením vzťahov pre tangenciálne zrýchlenie (3.64) a normálové zrýchlenie (3.70) dostávame

$$\vec{a} = \frac{dv}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} - \frac{v^2}{R}\vec{\rho} \,. \tag{3.71}$$

Vzťah (3.71) je vyjadrením celkového zrýchlenia hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici s polomerom R. V prípade rovnomerného pohybu po kružnici je tangenciálne zrýchlenie nulové a normálové zrýchlenie konštantné. A zase v prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici je tangenciálne zrýchlenie konštantné a normálové zrýchlenie narastá s druhou mocninou obvodovej rýchlosti.

4 Dynamika hmotného bodu

V predchádzajúcej kapitole - kinematike hmotného bodu sme sa zaoberali pohybom a pokojom telies, čiže formou pohybu. Neriešili sme príčiny vzniku pohybu hmotného bodu. A práve štúdiom týchto otázok sa zaoberá časť mechaniky - dynamika (z gréckeho **dynamis -** sila). V tejto časti sa oboznámime s klasickou - newtonovskou mechanikou, ktorej zákony platia pre telesá pohybujúce sa rýchlosťami oveľa menšími, ako je rýchlosť svetla vo vákuu (čiže rýchlosťami menej ako $3 \times 10^8\, m/s$). Pri rýchlostiach blízkych rýchlosti svetla musíme newtonovskú mechaniku nahradiť Einsteinovou teóriou relativity platnou pre všetky rýchlosti telies. Taktiež v oblasti mikrosveta (pohyb elektrónov v atóme) je potrebné zameniť newtonovskú mechaniku kvantovou mechanikou. Dnes je newtonovská mechanika chápaná ako špeciálny prípad týchto všeobecných teórií avšak veľmi významný, pretože je použiteľná pre štúdium pohybu telies v obrovskom rozsahu ich veľkostí, od objektov veľmi malých, od hranice atómovej štruktúry až po astronomické objekty.

Vzájomné pôsobenie telies (interakcia) sa môže uskutočňovať napr. pri vzájomnom styku telies alebo prostredníctvom fyzikálnych polí (gravitačného, elektrického, magnetického). Toto vzájomné pôsobenie telies alebo telies a polí charakterizuje vektorová fyzikálna veličina **sila** – $\vec{F}$. Výsledkom vzájomného silového pôsobenia telies môže byť deformácia týchto telies alebo zmena ich pohybového stavu. Teleso, ktoré je v dostatočnej vzdialenosti od všetkých ostatných telies a nepôsobí na neho žiadne pole (nie je v žiadnom vzájomnom pôsobení s iným fyzikálnym objektom) nazývame **izolované teleso** (prípadne, ak zanedbávame rozmery telesa hovoríme o **izolovanom hmotnom bode**). Ako izolované sa správajú všetky telesá, pri ktorých je silové pôsobenie ostatných telies vykompenzované.

Vzťažné sústavy, v ktorých izolované hmotné body zotrvávajú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe sa nazývajú **inerciálne vzťažné**

sústavy. Zmenu pohybového stavu telies môže v nich spôsobiť len ich vzájomné pôsobenie s inými objektmi. Vzťažné sústavy, v ktorých zmena pohybového stavu telies môže nastať bez ich vzájomného pôsobenia s ostatnými objektmi sa nazývajú **neinerciálne vzťažné sústavy**. V mnohých prípadoch môžeme s dostatočnou presnosťou za inerciálnu považovať vzťažnú sústavu spojenú s povrchom Zeme. Odchýlky od vlastností inerciálnej vzťažnej sústavy spôsobené rotáciou Zeme, pôsobením Slnka, Mesiaca a pod. môžeme pozorovať iba pri niektorých dlhotrvajúcich dejoch. Ešte viac sa bude k inerciálnej vzťažnej sústave približovať vzťažná sústava, ktorá má začiatok v strede Zeme a osi orientované k vhodným hviezdam (geocentrická sústava), prípadne vzťažná sústava spojená so stredom Slnka (heliocentrická sústava). Vždy možno nájsť reálnu vzťažnú sústavu, ktorá bude s dostatočnou presnosťou spĺňať vlastnosti inerciálnej vzťažnej sústavy a umožní čo najjednoduchší opis a vysvetlenie fyzikálnych dejov.

Všetky inerciálne vzťažné sústavy sú si navzájom rovnocenné. Buď sa navzájom pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom alebo sú v pokoji, pričom nie je možné žiadnym pokusom v inerciálnej vzťažnej sústave určiť, či je daná sústava v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. V prípade niektorých fyzikálnych veličín namerajú pozorovatelia v rôznych inerciálnych vzťažných sústavách tie isté hodnoty. Takýmito **invariantnými veličinami** v newtonovskej mechanike sú **sila**, **hmotnosť**, **zrýchlenie** a **čas**. Iné fyzikálne veličiny, ako napr. **rýchlosť**, majú pre pozorovateľa v rôznych inerciálnych vzťažných sústavách rôzne hodnoty (pre jedného pozorovateľa nachádzajúceho sa v inerciálnej vzťažnej sústave pohybujúcej sa rýchlosťou $\vec{v}$ je určitý objekt v pokoji, pre iného pozorovateľa v inej sústave sa ten istý objekt pohybuje napr. rýchlosťou $\vec{v}$). Vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách však platí **princíp invariantnosti**: **Fyzikálne zákony vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách majú rovnaký tvar.**

Z tohto princípu vyplýva, že voľba vzťažnej sústavy nemôže ovplyvniť platnosť fyzikálnych zákonov. Princíp invariantnosti hovorí, že dvaja rôzni pozorovatelia, ktorí budú študovať tú istú udalosť v dvoch rôznych inerciálnych sústavách musia dôjsť k záveru, že príroda funguje pre oboch rovnako. Aj keď hodnoty napr. práce a kinetickej energie namerané rôznymi pozorovateľmi sa budú líšiť, vzťah medzi prácou a kinetickou energiou bude v oboch vzťažných sústavách rovnaký.

4.1 Newtonove pohybové zákony, impulz sily, moment sily

Predtým, než Newton[1] sformuloval svoju mechaniku, prevládal názor (Aristoteles), že pre udržanie telesa v pohybe stálou rýchlosťou je potrebné nejaké pôsobenie (napr. ťahom alebo tlakom), t. j. "sila", lebo inak sa teleso zastaví. Úvaha sa zdá byť celkom rozumná, pretože ak napr. uvedieme hokejový puk do kĺzavého pohybu po drevenej podlahe, bude naozaj spomaľovať, až sa nakoniec zastaví. Ak chceme docieliť, aby sa puk po podlahe kĺzal stálou rýchlosťou, musíme ho neustále tlačiť alebo ťahať. Ak by sme však vymenili drevenú podlahu za ľadovú plochu, puk by sa kĺzavým pohybom dostal do väčšej vzdialenosti a potom by sa zastavil. Ak by sme však urobili ľadovú plochu dokonale hladkou, puk by sa po nej pohyboval bez toho, aby spomaľoval. Dospeli sme teda k záveru, že na udržanie stálej rýchlosti pohybu telesa nepotrebujeme silu. Pre zjednodušenie nebudeme uvažovať o otáčavom pohybe a budeme pracovať výlučne s modelom hmotného bodu. Môžeme teda formulovať **I. Newtonov pohybový zákon (zákon zotrvačnosti)**, ktorý hovorí: **Každý hmotný bod v inerciálnej vzťažnej sústave zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútený vonkajšími silami tento svoj stav zmeniť.**

Treba poznamenať, že prvý Newtonov pohybový zákon platí nielen v prípadoch, kedy na teleso nepôsobia žiadne sily (teleso je v dostatočnej vzdialenosti od silového pôsobenia ostatných telies), ale aj vtedy, keď sily pôsobia, ale ich výslednica je nulová. Zákon charakterizuje zotrvačnosť ako základnú vlastnosť každého izolovaného hmotného bodu zotrvávať v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe v inerciálnej vzťažnej sústave. Taktiež z neho vyplýva, že na zmenu pohybového stavu hmotného bodu v inerciálnej vzťažnej sústave je potrebné jeho vzájomné pôsobenie s inými objektmi. Mierou toho pôsobenia je sila. Zotrvačné a gravitačné vlastnosti objektov charakterizuje ďalšia fyzikálna veličina, ktorú nazývame **hmotnosť** m (jednotka v sústave SI je kilogram $[m] = kg$). Hmotnosť je charakteristikou samotného predmetu. Na tomto mieste je vhodné zdôrazniť rozdiel medzi tiažovou silou, hmotnosťou

[1] ISAAC NEWTON $(1642 - 1727)$ geniálny anglický fyzik, matematik a astronóm, svojím dielom pozdvihol vedu na novú, dovtedy netušenú úroveň, a tak vytvoril predpoklady pre vznik nových moderných vied. Podľa jeho zákonov sa riadi náš pohyb na makroskopickej úrovni - Tri Newtonove zákony a aj na vesmírnej - Newtonov gravitačný zákon. Aj mechaniku ako takú delíme na dve časti: klasickú-newtonovskú a kvantovú mechaniku.

a ich určovaním. Vážením určujeme veľkosť tiažovej sily, ktorou Zem pôsobí na teleso. Potom zo znalosti tiažového zrýchlenia $\vec{g}$ v mieste merania dokážeme určiť veľkosť hmotnosti telesa. Napr. ak by sme chceli "vážiť" menej, mali by sme vyliezť na vrchol vysokej hory, kde je hodnota tiažového zrýchlenia nižšia. Naša reálna hmotnosť sa samozrejme nezmení, ale veľkosť tiažovej sily zobrazená na váhe ako hmotnosť bude iná ako v nižšej nadmorskej výške (kapitola Gravitačné pole).

Zo skúsenosti vieme, že ak na dve telesá rôznej hmotnosti budeme pôsobiť rovnakou silou (napr. kopnutie do rôznych lôpt), bude aj ich pohybový účinok iný - čím menšia hmotnosť, tým väčšia zmena rýchlosti telesa za jednotku času, čiže zrýchlenia. Alebo čím väčšia má byť zmena rýchlosti telesa danej hmotnosti za určitý čas, tým väčšia sila naň musí pôsobiť. Prípadne, pre to isté zrýchlenie rôznych telies musí byť pôsobiaca sila tým väčšia, čím väčšia je ich hmotnosť. Zhrnutím týchto poznatkov Newton formuloval **II. Newtonov pohybový zákon**: **Sila pôsobiaca na hmotný bod je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu udeľuje**

$$\vec{F} = m\,\vec{a}\;. \tag{4.1}$$

Sila $\vec{F}$ je vektorovou fyzikálnou veličinou, ktorej smer je zhodný so smerom zrýchlenia $\vec{a}$, ktoré udeľuje hmotnému objektu. Pod silou $\vec{F}$ môžeme rozumieť aj vektorový súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso. Jednotkou sily je **newton** (N). 1 Newton je sila, ktorá telesu hmotnosti $1\,kg$ udeľuje zrýchlenie $1\;m/s^2$. Odtiaľ $[F]\;=\;1\,N = 1\;kg\cdot m/s^2$.

Za povšimnutie stojí, že II. Newtonov pohybový zákon je v súlade s prvým. Ak na hmotný bod nepôsobia žiadne sily, podľa rovnice (4.1) sa bude hmotný bod pohybovať bez zrýchlenia, t. j. rovnomerným pohybom alebo bude v pokoji.

Zmena pohybového stavu hmotného bodu nezávisí len od pôsobiacej sily, ale aj od času, za ktorý sila pôsobila. **Mierou časového účinku sily** je fyzikálna veličina, ktorú nazývame **impulz sily**. Impulz sily $\vec{I}$ môžeme vo všeobecnosti vyjadriť

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t\;. \tag{4.2}$$

Ak však bude pôsobiť konštantná sila, môžeme impulz sily vyrátať ako súčin sily $\vec{F}$ a času t, počas ktorého sila pôsobila

$$\vec{I} = \vec{F}\,t\;. \tag{4.3}$$

Impulz sily je vektorovou fyzikálnou veličinou a pre konštantnú silu má smer rovnaký ako sila. Ak bude sila $\vec{F}$ za čas t pôsobiť na hmotný bod s konštantnou hmotnosťou m, pre impulz sily platí

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t = \int_0^t m\vec{a}\,\mathrm{d}t = m\int_0^t \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = m\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = m\,(\vec{v} - \vec{v}_0)\ , \qquad (4.4)$$

kde $\vec{v}$ a $\vec{v}_0$ sú rýchlosti hmotného bodu v čase t a $t = 0\,s$. Súčin hmotnosti m a rýchlosti $\vec{v}$ hmotného bodu nazývame **hybnosť** a označujeme $\vec{p}$

$$\vec{p} = m\,\vec{v}\ . \qquad (4.5)$$

Hybnosť je vektorová fyzikálna veličina, ktorej smer je totožný so smerom rýchlosti. Jednotkou hybnosti je $[p] = kg \cdot m/s$. Definovaním hybnosti môžeme pre impulz sily písať

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p} - \vec{p}_0\ . \qquad (4.6)$$

Impulz sily, ktorá pôsobí na hmotný bod, je rovný zmene jeho hybnosti.

Schopnosť sily $\vec{F}$ otáčať teleso okolo pevnej osi závisí nielen od veľkosti a smeru sily, ale aj od polohového vektora $\vec{r}$ pôsobiska sily vzhľadom na os otáčania a charakterizuje ho fyzikálna veličina nazývaná **moment sily** $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\ . \qquad (4.7)$$

Moment sily je vektorovou veličinou a jeho smer je kolmý k rovine vektorov $\vec{r}$ a $\vec{F}$. Tak ako hybnosť $\vec{p}$ charakterizuje posuvný pohyb hmotného bodu, charakteristikou otáčavého pohybu okolo osi neprechádzajúcej hmotným bodom je **moment hybnosti** $\vec{L}$

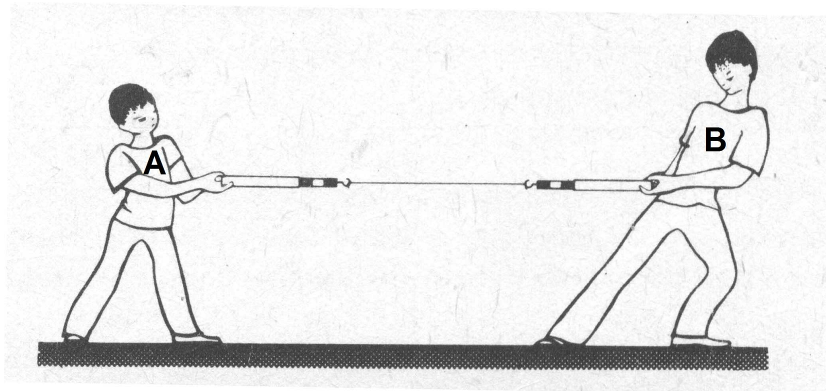
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\ (\vec{r} \times \vec{v})\ , \qquad (4.8)$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor hmotného bodu vzhľadom na os otáčania.
Zavedenie hybnosti umožňuje **II. Newtonov pohybový zákon** (4.1) zapísať aj v inej forme

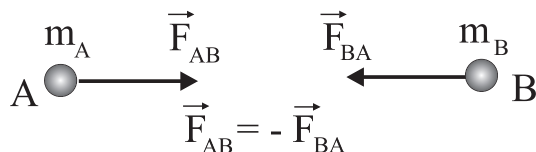
$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \qquad (4.9)$$

Z vyjadrenia vyplýva, že sila pôsobiaca na hmotný bod je rovná derivácii jeho hybnosti podľa času. Na základe predchádzajúcej formulácie môžeme druhý Newtonov pohybový zákon formulovať nasledujúco: **Pomer zmeny hybnosti**

hmotného bodu a času, za ktorý táto zmena nastala, je priamoúmerný výslednej pôsobiacej sile.
Z tejto formulácie vyplýva, že ak nastala zmena hybnosti v čase, musela na teleso pôsobiť sila, prípadne obrátene, ak na teleso bude pôsobiť sila, nastane zmena jeho hybnosti.



Obrázok 4.1: Aj keď sa snaží každý chlapec ťahať inou silou, údaj na obidvoch silomeroch je vždy rovnaký.



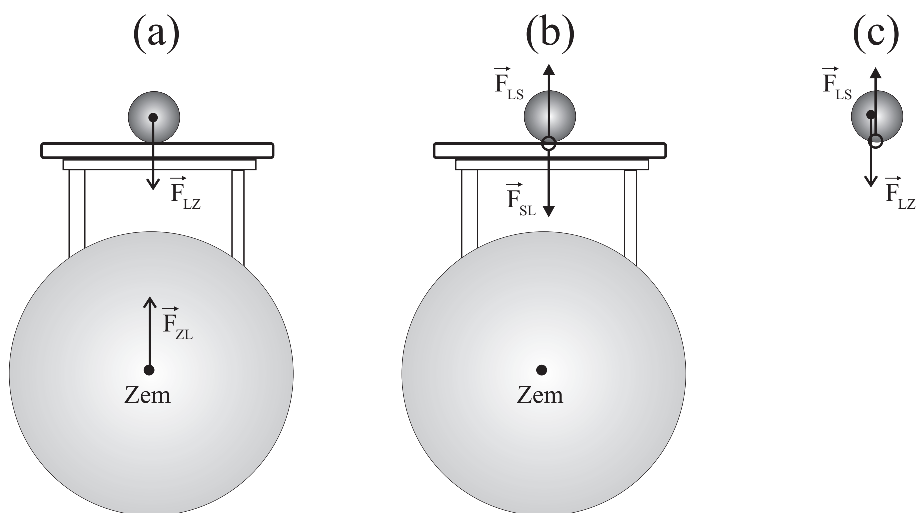
Obrázok 4.2: III. Newtonov pohybový zákon. Teleso A pôsobí na teleso B silou $\vec{F}_{BA}$ a teleso B pôsobí na teleso A silou $\vec{F}_{AB}$ rovnako veľkou ale opačného smeru.

Sily pôsobia vždy vo dvojiciach. Nech Adam na obrázku 4.1 pôsobí na Borisa silou $\vec{F}_{BA}$. Ako ukazuje obrázok a potvrdzuje experiment, aj Boris pôsobí na Adama silou $\vec{F}_{AB}$, ktorá je rovnako veľká, ale opačne orientovaná. Silové pôsobenie dvoch telies je vždy vzájomné. Tento poznatok je obsahom **III. Newtonovho pohybového zákona**, ktorý hovorí: **Dva hmotné body na seba navzájom pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru.**

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \,. \tag{4.10}$$

Všimnime si označenie indexov - $\vec{F}_{AB}$ označuje silu, ktorá vyjadruje pôsobenie telesa B na teleso A (obr. 4.2).

Rovnica (4.10) platí bez ohľadu na to, či sa telesá pohybujú alebo sú v pokoji. Tento zákon, nazývaný tiež **zákon akcie a reakcie** hovorí, že v inerciálnej vzťažnej sústave pri vzájomnom pôsobení telies vznik každej sily – **akcie** sprevádza vznik rovnako veľkej sily opačného smeru – **reakcie**. Akcia a reakcia súčasne vznikajú a súčasne zanikajú. Mohla by nás napadnúť otázka, ak sú sily rovnako veľké a opačného smeru, prečo sa tieto sily nezrušia? Akcia a reakcia pôsobia vždy na iné telesá, preto sa nesčítavajú do výslednej sily a vo svojich účinkoch sa navzájom nerušia. Dve rovnako veľké sily opačného smeru súčasne pôsobiace na ten istý hmotný bod nie sú akcia a reakcia a ich účinok sa navzájom ruší. K vysvetleniu nám poslúži nasledujúci obrázok 4.3.



Obrázok 4.3: K vysvetleniu a pochopeniu pojmov akcia a reakcia. Lopta L, stôl S, Zem Z a ich vzájomné pôsobenia. Sily na obrázku *c)* nie sú akcia a reakcia.

Lopta je položená na stole, ktorý je umiestnený na povrchu Zeme. Zem pôsobí na loptu zvisle nadol tiažovou silou $\vec{F}_{LZ}$. Lopta nezrýchľuje, pretože sila je kompenzovaná rovnako veľkou, ale opačne orientovanou, normálovou silou $\vec{F}_{LS}$, ktorou na loptu pôsobí stôl. Sily $\vec{F}_{LZ}$ a $\vec{F}_{LS}$ netvoria dvojicu akcia-reakcia, pretože pôsobia na to isté teleso – loptu. Reakciou k sile $\vec{F}_{LZ}$ je gravitačná sila $\vec{F}_{ZL}$, ktorou pôsobí lopta na Zem. Reakciou k sile $\vec{F}_{LS}$ je sila $\vec{F}_{SL}$, ktorou pôsobí lopta na stôl. Dvojice akcia–reakcia vystupujúce v tejto úlohe sú: $\vec{F}_{LZ} = -\vec{F}_{ZL}$ (lopta a Zem) a $\vec{F}_{LS} = -\vec{F}_{SL}$ (lopta a stôl).

4.2 Práca, výkon a energia

V tejto časti charakterizujeme veličiny, ktoré súvisia s pôsobením sily. Postupne sa budeme zaoberať mechanickou prácou, výkonom a energiou.

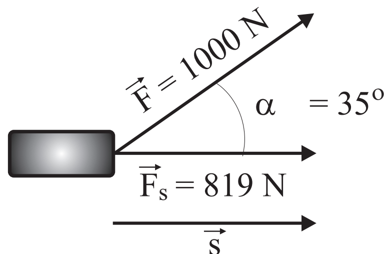
4.2.1 Práca

Ak chceme premiestniť nejaký predmet, musíme vynaložiť určitú námahu. Zvyčajne to robíme tak, že na predmet pôsobíme silou a vykonáme pri tom istú prácu. Vo všeobecnosti pod prácou rozumieme mieru účinku sily, ktorým hmotný bod mení svoju polohu. Ak na hmotný bod bude pôsobiť nejaká *konštantná sila* $\vec{F}$ tak, že jej účinkom sa posunie po úsečke (dráhe) $\vec{s}$, potom práca W je rovná skalárnemu súčinu vektorov sily $\vec{F}$ a dráhy $\vec{s}$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}\,. \tag{4.11}$$

Ak smer sily a dráhy nebudú rovnaké, ale vektory $\vec{F}$ a $\vec{s}$ budú zvierať uhol α, potom využitím znalostí z vektorového počtu o skalárnom súčine dvoch vektorov môžeme predchádzajúci vzťah vyjadriť ako súčin veľkosti priemetu sily do smeru dráhy F_s (zložka sily v smere dráhy) a dráhy s (obr. 4.4)

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}\right| \, |\vec{s}| \cos \alpha = F_s\, s\,. \tag{4.12}$$



Obrázok 4.4: Priemet pôsobiacej sily do smeru dráhy.

Ak smer sily a dráhy bude ten istý (uhol medzi vektormi $\vec{F}$ a $\vec{s}$ bude $0\,rad$), potom prácu môžeme vyjadriť

$$W = F\, s\,. \tag{4.13}$$

Jednotkou práce v SI sústave je **joule**[2] ($[W] = J = N.m = kg.m^2/s^2$).

[2] JAMES PRESCOTT JOULE (1818 – 1889) britský fyzik a pivovarník. Svoj výskum sústredil na zlepšenie efektivity elektrických motorov. Zaoberal termodynamikou a tiež magnetizmom, pričom je po ňom pomenovaný i Joule-Lenzov zákon.

Ak bude na časticu pôsobiť niekoľko síl $\vec{F}_i$, ktorých výslednica bude konštantná, môžeme ich celkovú prácu určiť tak, že vo vzťahu (4.11) nahradíme $\vec{F}$ výslednicou $\sum_i \vec{F}_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \ , \tag{4.14}$$

kde $\vec{F}_i$ sú jednotlivé sily. Potom práca vykonaná výslednicou síl pri posunutí $\vec{s}$ častice bude daná vzťahom

$$W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{s} \ . \tag{4.15}$$

Ak budú jednotlivé sily $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... konštantné, môžeme predchádzajúci vzťah prepísať do tvaru

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{s} + \vec{F}_2 \cdot \vec{s} + \vec{F}_3 \cdot \vec{s} + \ldots = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \ . \tag{4.16}$$

Tento vzťah vyjadruje skutočnosť, že celková práca vykonaná na častici pri pôsobení viacerých síl je rovná súčtu prác vykonaných jednotlivými silami.

Ak bude na hmotný bod pôsobiť premenlivá sila, budeme postupovať tak, že si dráhu rozdelíme na také malé intervaly $\Delta\vec{s}$, aby sme v každom z nich mohli považovať silu $\vec{F}$ za konštantnú, resp. dráhu za priamočiaru. Elementárnu prácu v i-tom intervale vypočítame zo vzťahu

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \tag{4.17}$$

a celkovú prácu dostaneme súčtom jednotlivých elementárnych prác pozdĺž celej dráhy

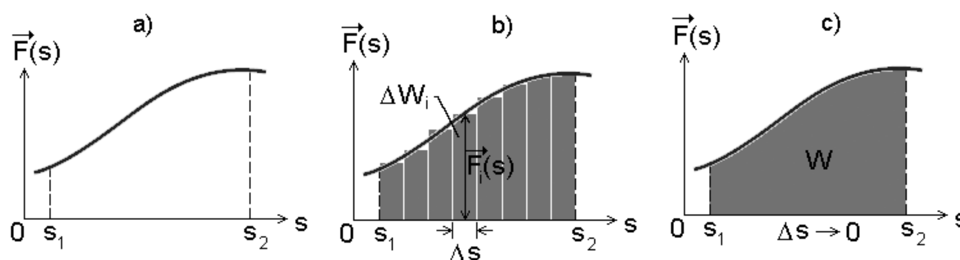
$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \ . \tag{4.18}$$

Ak jednotlivé intervaly budú nekonečne malé (infinitezimálne) ds, sumácia prejde na integrál, a tak dostávame **definíciu práce**

$$W = \int \mathrm{d}\, W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \ , \tag{4.19}$$

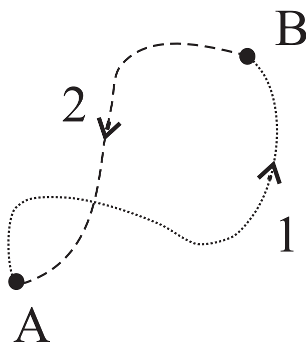
pričom integrovať treba pozdĺž celej dráhy (obr. 4.5). Vzťah (4.19) (v prípade konštantnej sily $\vec{F}$) môžeme pomocou polohového vektora $\vec{r}$ prepísať do tvaru

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \ . \tag{4.20}$$



Obrázok 4.5: (a) Graf závislosti sily pôsobiacej na časticu, ktorá sa pohybuje po priamej dráhe s, pričom sila $\vec{F}$ na ňu pôsobí rovnobežne s osou s v intervale s_1 až s_2. (b) Dráha v intervale s_1 až s_2 bola rozdelená na jednotlivé rovnaké elementy Δs, v ktorých predpokladáme pôsobenie konštantnej sily $\vec{F_i}(s)$. Sila v danom intervale vykoná prácu W_i. (c) Limitný prípad, kedy $\Delta s \to 0$ a práca vykonaná silou $\vec{F}(s)$ v intervale s_1 až s_2 je reprezentovaná obsahom vyfarbenej plochy pod krivkou.

Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že práca konštantnej sily nezávisí od tvaru trajektórie, ale len od počiatočnej a koncovej polohy hmotného bodu. Podľa toho, či v nejakom silovom poli práca závisí od tvaru dráhy alebo je od tejto dráhy nezávislá, delíme sily na **konzervatívne** (pri ktorých práca nezávisí od trajektórie) a **nekonzervatívne**.



Obrázok 4.6: Častica, na ktorú pôsobila konzervatívna sila $\vec{F}$ sa pohybuje z bodu A do B (1) a opačne (2).

Toto rozdelenie môžeme charakterizovať aj inak. Ak sa pri prechode z bodu A do bodu B vykoná práca W a z bodu B do bodu A po inej trajektórii vykoná práca W' rovnako veľkú ale s opačným znamienkom, potom na hmotný bod pôsobila konzervatívna sila (obr. 4.6).

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že krivkový integrál konzervatívnej sily po uzavretej krivke je rovný nule

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \,. \qquad (4.21)$$

4.2.2 Výkon

Tú istú prácu môžeme vykonať za rôzny čas. Mierou toho, ako "rýchle" koná sila prácu je fyzikálna veličina, ktorá sa nazýva **výkon** P. Ak vykoná sila F prácu ΔW za dobu Δt, je jej **priemerný výkon** v danom časovom intervale definovaný pomerom

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \,. \qquad (4.22)$$

Okamžitý výkon P je limitným prípadom priemerného výkonu pre $\Delta t \to 0$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \,. \qquad (4.23)$$

Jednotkou výkonu v SI je **watt**[3] ($[P] = W = J/s = kg.m^2/s^3$). (Stretnúť sa môžeme aj s jednotkou nazývanou konská sila (konská sila $= 746\,W$)). Pri stálom výkone P môžeme prácu vyjadriť ako súčin výkonu a času

$$W = P\,t \qquad (4.24)$$

a z tohto vzťahu nám pre prácu vyplýva bežne používaná jednotka pri spotrebe elektrickej energie – kilowatthodina (1 kilowatthodina $= 1\ kW.h = 3,6 \times 10^6\ J = 3,6\ MJ$).

Ak vo vzťahu (4.22) vyjadríme prácu súčinom $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, môžeme pre výkon písať

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \,. \qquad (4.25)$$

Výkon teda môžeme vyjadriť aj ako skalárny súčin sily a rýchlosti telesa. Takže ak napr. ťahač bude pôsobiť na plne naložený príves silou $\vec{F}$ a rýchlosť prívesu je v danom okamihu $\vec{v}$, súčin sily a rýchlosti nám povie, aký je "výkon ťahača" v danom okamihu.

[3] JAMES WATT (1736 – 1819) anglický fyzik, matematik a mechanik. Roku 1769 zostrojil prvý funkčný parný stroj.

4.2.3 Energia

Pod pojmom **energia** budeme rozumieť skalárnu fyzikálnu veličinu, ktorej hodnota je určená stavom fyzikálnej sústavy (objektu). Podľa charakteru pôsobiacich síl hovoríme o energii mechanickej, elektrickej, chemickej, jadrovej a pod. Často sa používa tvrdenie, že energia je schopnosť konať prácu. Mierou procesu premeny energie aj mierou prenosu energie z jedného telesa na druhé je práca (fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje dej). Aj keď hodnoty veličín energie a práce vyjadrujeme v rovnakých jednotkách, nesmieme tieto veličiny stotožňovať (jedna vyjadruje stav sústavy, druhá dej).

Keď na hmotný bod s hmotnosťou m pôsobí sila $\vec{F}$, udeľuje mu zrýchlenie $\vec{a}$, pričom koná prácu

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \\ &= m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} v\, \mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \,. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Aby sa hmotný bod s hmotnosťou m, ktorý sa pohybuje rýchlosťou $\vec{v}$ zastavil, musí na neho pôsobiť sila $\vec{F}'$ opačného smeru, ako je smer rýchlosti $\vec{v}$. Sila $\vec{F}'$ pri zastavovaní hmotného bodu koná prácu

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}'(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \ldots = m \int_{\vec{v}}^{0} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = -m \int_{v}^{0} v\, dv \\ &= -\left(0 - \frac{1}{2}m\, v^2\right) = \frac{1}{2}m\, v^2 \,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Hmotný bod má teda schopnosť vykonať prácu $\frac{1}{2}m\, v^2$. Hovoríme, že má pohybovú alebo **kinetickú energiu. Kinetická energia** hmotného bodu s hmotnosťou m pohybujúceho sa rýchlosťou $\vec{v}$ je rovná

$$E_k = \frac{1}{2}m\, v^2 \,. \tag{4.28}$$

Využitím vzťahu (4.26) môžeme vysloviť tvrdenie, že zmena kinetickej energie častice ΔE_k je rovná práci W vykonanej silou $\vec{F}$.

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = W \,, \tag{4.29}$$

pričom symbolom E_{k1} sme označili počiatočnú kinetickú energiu častice ($\frac{1}{2}m\,v_1^2$) a E_{k2} predstavuje výslednú kinetickú energiu častice ($\frac{1}{2}m\,v_2^2$). Tento vzťah však neplatí všeobecne, stačí si predstaviť rotujúce alebo deformujúce sa teleso, kde sa jednotlivé časti telesa pohybujú rôznymi rýchlosťami.

Kinetická energia E_k súvisí s pohybovým stavom častice alebo telesa. Zo skúseností vieme, že ak sa teleso pohybuje rýchlejšie, jeho kinetická energia je väčšia, ak je teleso v pokoji, jeho kinetická energia je nulová. To isté platí aj pre kinetickú energiu telesa nezanedbateľných rozmerov, ak sa všetky jeho časti pohybujú rovnakou rýchlosťou $\vec{v}$, t. j. vykonávajú posuvný (translačný) pohyb, pričom uvažujeme, že teleso nerotuje ani nie je deformované. Jednotkou kinetickej energie (a všeobecne energie) je **joule** ($[E] = J = kg.m^2/s^2$). V oblasti časticovej fyziky sa zvykne používať aj jednotka elektrónvolt ($1\,eV = 1,602 \times 10^{-19}\ J$).

Prenos energie medzi objektom a jeho okolím môže byť sprostredkovaný silovým pôsobením alebo tepelnou výmenou. Deje súvisiace so silovým pôsobením nazývame súhrnne konanie práce. Ak budeme na teleso pôsobiť nejakou silou, z II. Newtonovho zákona vyplýva, že jeho rýchlosť bude rásť, a tým rastie aj jeho kinetická energia. Naopak, ak bude teleso vplyvom výslednej sily spomaľovať, bude aj jeho kinetická energia klesať. Ak sa kinetická energia častice vplyvom silového pôsobenia jeho okolia všeobecne mení, hovoríme, že sily pôsobiace na časticu konajú prácu. Ak sila zväčšila (nezmenila, zmenšila) kinetickú energiu častice, hovoríme, že vykonala kladnú (nulovú, zápornú) prácu, prípadne hovoríme, že sila prácu koná (nekoná, sprostredkováva). Práca teda predstavuje tú časť energie, ktorú teleso získava prostredníctvom silového pôsobenia jeho okolia.

Uvažujme teraz loptu hmotnosti m, ktorú môžeme považovať za bodový objekt. Ak ju vyhodíme zvisle nahor počiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0$ vzhľadom k Zemi (pričom pre jednoduchosť zanedbáme otáčanie Zeme okolo Slnka a jej rotáciu okolo vlastnej osi (vtedy tiažová sila Zeme $\vec{F}_G$ je rovná gravitačnej sile $\vec{F}_g$) a uvažujeme len malé výšky nad povrchom Zeme), bude jej počiatočná kinetická energia $E_{k0} = \frac{1}{2}m\,v_0^2$. V priebehu výstupu, zmeny výšky h, sa jej pohyb pôsobením príťažlivej **tiažovej sily** Zeme $\vec{F}_G = \vec{F}_g = m\,\vec{g}$ (kde $\vec{g}$ je vektor tiažového zrýchlenia smerujúci do stredu Zeme) spomaľuje a kinetická energia klesá. Ak bude tiažová sila jedinou silou, ktorá na loptu pôsobí (ak zanedbáme odporovú silu vzduchu), potom k zmene kinetickej energie prispieva

iba práca tiažovej sily

$$W_g = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \int_{\vec{h}_1}^{\vec{h}_2} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{h}$$
$$= -m \int_{h_1}^{h_2} g \, \mathrm{d}h = -m \, g \int_{h_1}^{h_2} \mathrm{d}h = m \, g(h_1 - h_2) \ . \qquad (4.30)$$

Ak zoberieme záporne vzatú prácu vykonanú tiažovou silou, môžeme pri pohybe telesa v blízkosti povrchu Zeme zadefinovať zmenu **tiažovej potenciálnej energie sústavy** teleso - Zem

$$\Delta E_p = -W \ , \qquad (4.31)$$

ktorá sa tiež nazýva **potenciálna energia telesa** v tiažovom poli Zeme. V prípade sústavy častica - Zem budeme pod E_p rozumieť hodnotu tiažovej potenciálnej energie častice vo výške h. Vo vzťahu

$$\Delta E_p = E_{ph} - E_{p0} = m \, g \, (h - 0) \qquad (4.32)$$

pod hodnotou E_{p0} budeme rozumieť tiažovú potenciálnu energiu v tzv. referenčnej konfigurácii, pri ktorej sa častica nachádza v referenčnom bode o súradnici h_0. Zvyčajne kladieme $E_{p0} = 0 \, J$ pre $h_0 = 0 \, m$. Predchádzajúci vzťah môžeme potom prepísať do tvaru

$$E_p(h) = m \, g \, h, \qquad (4.33)$$

z ktorého vyplýva, že tiažová potenciálna energia sústavy častica - Zem závisí iba od zvislej polohy h častice vzhľadom na referenčnú polohu o súradnici $h_0 = 0 \, m$ (t. j. na výške častice nad referenčným bodom). Ak vzťažnú sústavu a nulovú hladinu spojíme s povrchom Zeme, hovoríme stručne, že potenciálnu energiu má teleso. Ako sme však už spomenuli, v skutočnosti potenciálnu energiu tiažovú nemá samo teleso, ale presnejšie sústava Zem - teleso. Predchádzajúci vzťah (4.33) je možné použiť iba v nie veľkých vzdialenostiach od povrchu Zeme, kde hodnotu $\vec{g}$ považujeme za približne konštantnú. Podrobnejšie je táto problematika popísaná v kapitole Gravitačné pole.

4.3 Zákony zachovania energie

Mechanická energia sústavy je definovaná ako súčet jej potenciálnej energie

a celkovej kinetickej energie jej objektov

$$E_m = E_p + E_k \ . \tag{4.34}$$

Aj keď hodnota potenciálnej energie závisí od voľby počiatku sústavy súradníc, zmena potenciálnej energie je od nej nezávislá. Tu treba pripomenúť, že fyzikálny význam má iba zmena ΔE_p potenciálnej energie, nie samotná hodnota potenciálnej energie, ktorá závisí na ľubovoľnej voľbe referenčnej konfigurácie (kde je $E_{p0} = 0\,J$).

Ak budeme uvažovať sústavu častíc neinteragujúcich s okolím (izolovaná sústava), práca W, ktorú vykonajú konzervatívne sily, ktorými na seba navzájom pôsobia častice sústavy, určuje zmenu kinetickej energie sústavy vzťah $\Delta E_k = W$ (4.29). No súčasne ju môžeme vyjadriť ako záporne vzatú zmenu potenciálnej energie $\Delta E_p = -W$ (4.31). Kinetická energia sústavy sa mení na úkor jej potenciálnej energie. Kombináciou predchádzajúcich vzťahov dostávame

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \ , \tag{4.35}$$

inými slovami nárast jednej z oboch foriem energie je presne vyvážený poklesom druhej. Predchádzajúci vzťah môžeme prepísať do tvaru

$$E_{k2} - E_{k1} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) \ , \tag{4.36}$$

kde indexy 1 a 2 sa vzťahujú k dvom rôznym okamihom, t. j. konfiguráciám sústavy. Úpravou dostaneme vzťah

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} \ , \tag{4.37}$$

ktorý predstavuje matematickú formuláciu **zákona zachovania mechanickej energie**. Ľavá a pravá strana rovnice predstavujú mechanickú energiu v rôznych okamihoch, a teda aj v dvoch rôznych konfiguráciách sústavy. Predchádzajúci vzťah môžeme sformulovať nasledujúco: **Ak pôsobia v izolovanej sústave iba konzervatívne sily, mení sa jej kinetická a potenciálna energia tak, že ich súčet, t. j. mechanická energia sústavy, je stála.** Toto tvrdenie vyjadruje **zákon zachovania mechanickej energie**. Pomocou vzťahu (4.35) môžeme zákon zachovania mechanickej energie prepísať do tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0 \ . \tag{4.38}$$

Tento zákon má všeobecnú platnosť a týka sa všetkých prípadov izolovaných sústav (t. j. častice sústavy neinteragujú s jej okolím a na objekty sústavy nepôsobia žiadne vonkajšie sily), v ktorých pôsobením síl nenastávajú premeny na iné formy energie ako len na mechanickú potenciálnu a kinetickú energiu. Ak napr. budú v sústave pôsobiť trecie alebo odporové sily, pri ktorých sa telesá zohrievajú, mechanická energia telies sa postupne bude meniť na iné formy energie a v takomto prípade zákon zachovania mechanickej energie v izolovanej sústave už platiť nebude. Bude však platiť **zákon zachovania celkovej energie** izolovanej sústavy, ktorý vznikol zovšeobecnením veľkého počtu experimentov (nebol nijako odvodený). Tento zákon hovorí: **Energia izolovanej sústavy (keď práca vonkajších síl je rovná nule) ostáva konštantnou pri všetkých dejoch, ktoré prebiehajú vo vnútri sústavy.**

Pritom treba poznamenať, že energia sa môže meniť z jednej formy na inú (mechanická na elektrickú, elektrická na tepelnú a pod.). Doposiaľ sa neobjavila žiadna výnimka tohto zákona, takže sa celkovej energii prisudzuje úloha zachovávajúcej sa veličiny i v situáciách, kedy sa čiastkové energie rôznych typov menia. Menej formálne môžeme povedať, že energia nemôže ani záhadne zmiznúť ani sa objavovať.

Pre lepšie pochopenie a objasnenie predchádzajúcich zákonov si predstavme dve situácie pohybu telesa. V prvom prípade sa teleso pohybuje po dokonale hladkej vodorovnej podložke. Sústava tvorená samotným telesom je považovaná za izolovanú, pretože žiadna zo síl, ktoré naň pôsobia (tiažová sila a tlaková sila podložky), nekoná prácu. V tejto sústave môžeme aplikovať zákon zachovania mechanickej energie. V druhom prípade sa však teleso bude pohybovať po podložke, ktorá nie je dokonale hladká. Rozšírime sústavu tak, že do nej okrem telesa zahrnieme aj vodorovnú podložku pevne spojenú so Zemou. Keďže zo skúsenosti vieme, že teleso pri svojom pohybe bude postupne spomaľovať a nakoniec sa zastaví, museli v tejto sústave pôsobiť sily a kinetická energia telesa sa premenila na inú formu energie. Týmito vnútornými silami izolovanej sústavy boli trecie sily, ktoré spôsobili, že úbytok kinetickej energie ΔE_k (a v tomto prípade aj mechanickej energie) prispel k zvýšeniu vnútornej energie telesa a podložky (obe sa zahriali). Zmena vnútornej energie sústavy ΔE_{in} je teda

$$\Delta E_{in} = -\Delta E_k \; , \tag{4.39}$$

odkiaľ vyplýva

$$\Delta E_k + \Delta E_{in} = 0 \; . \tag{4.40}$$

Aj keď sa mechanická energia telesa nezachováva, je súčet mechanickej energie a vnútornej energie sústavy teleso – podložka, ktorý predstavuje celkovú energiu sústavy teleso - podložka, konštantný

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_{in} = 0 \; . \tag{4.41}$$

Ak bude v sústave pôsobiť viacero konzervatívnych síl, pričom v sústave môže okrem zmien kinetickej a vnútornej energie jednotlivých objektov sústavy dochádzať aj k zmenám ich potenciálnej energie, celková energia izolovanej sústavy ΔE_{celk} sa bude opäť zachovávať a zákon zachovania celkovej energie nadobudne tvar

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{in} = 0 \; . \tag{4.42}$$

Ak sústava nebude izolovaná a vonkajšie sily v nej budú konať prácu, zmena celkovej energie ΔE_{celk} neizolovanej sústavy bude rovná práci W vykonanej vonkajšími silami pôsobiacimi na objekty sústavy

$$W = \Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{in} \; . \tag{4.43}$$

V závere tejto časti môžeme povedať, že pri všetkých dejoch v izolovaných sústavách platia: zákon zachovania hmotnosti, zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania celkovej energie, resp. v špecifických prípadoch ako zákon zachovania mechanickej energie.

5 Trecie sily

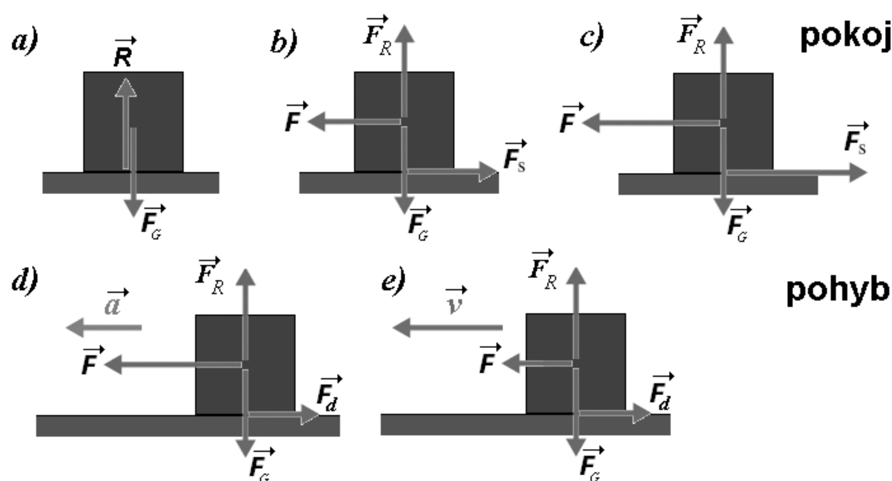
S trením sa stretávame doslova na každom kroku. Bez trenia by nebola možná naša chôdza, pohyb auta či bicykla, nemohli by sme písať perom, prípadne ho držať v ruke. Skrutky by nespĺňali svoj účel, utkaná látka by sa rozpadla a uzly by sa rozviazali. Na druhej strane vplyvom trenia v motore a hnacích mechanizmoch sa spotrebováva okolo 20 % benzínu v automobile navyše.

Podstatou vzniku trecích síl je vzájomné pôsobenie povrchových atómov dotýkajúcich sa telies. Skutočná mikroskopická dotyková plocha je omnoho menšia ako zdanlivá makroskopická styčná plocha (niekedy dokonca až 10^4 násobne). Pri pohybe telesa po podložke dochádza najprv ku krátkemu spojeniu a následne skĺznutiu stykových plôšok. Nepretržitosť opakovania šmyku a kontaktu stykových plôšok môže byť niekedy sprevádzané rôznymi zvukmi, napr. pri šmyku kolies na suchej dlažbe, pri škrabaní nechtom po tabuli, ťahmi sláčika po husľovej strune atď. Z pohľadu druhov pohybu, pri ktorých sa trenie prejavuje, rozlišujeme trenie šmykové a valivé.

5.1 Šmykové trenie

Na nasledujúcom myšlienkovom experimente si objasníme mechanizmy pôsobenia a vlastnosti síl trenia. Predstavme si kváder, ktorý leží na podlahe. Snažíme sa ho tlačiť vodorovne stálou silou, ale kváder sa nepohne. Je to spôsobené tým, že sila, ktorou na kváder pôsobíme je kompenzovaná vodorovnou brzdnou silou, ktorou podlaha pôsobí opačným smerom v mieste dna kvádra. Zaujímavosťou je, že veľkosť a smer tejto trecej sily je taký, aby sa rušil účinok akejkoľvek sily, ktorou by sme na kváder pôsobili. Existuje istá veľkosť sily, ktorú už brzdná sila kvádra nedokáže vykompenzovať a kváder sa pohne. Trecia sila, ktorou bude podlaha pôsobiť na pohybujúci sa kváder, bude ho postupne spomaľovať, až kým sa kváder zastaví. Keby sme chceli, aby sa

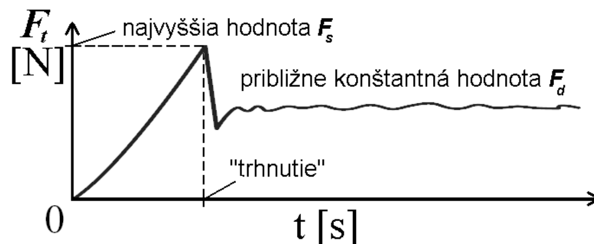
kváder pohyboval po podlahe konštantnou rýchlosťou, museli by sme ho tlačiť alebo ťahať silou, ktorá má rovnakú veľkosť ale opačný smer ako trecia sila, ktorá bráni jeho pohybu. Celá situácia je podrobne rozobraná z fyzikálneho hľadiska na obrázku 5.1. Na začiatku (a), kedy je kváder v pokoji, pôsobí na kváder tiažová sila Zeme $\vec{F}_G$, ktorá je vykompenzovaná reakciou $\vec{R}$ tlakovej sily podložky na kváder.



Obrázok 5.1: Pôsobenie síl na kváder. (a - c) Kváder je v pokoji, (d - e) kváder sa pohybuje. Keď je kváder v pokoji, vonkajšia sila $\vec{F}$ je kompenzovaná rovnako veľkou, opačne orientovanou silou statického šmykového trenia $\vec{F}_s$. S rastúcou silou $\vec{F}$ narastá aj veľkosť sily $\vec{F}_s$ až do najvyššej hodnoty (c). Potom nastane "trhnutie" a kváder sa začne pohybovať so zrýchlením $\vec{a}$ (d). Ak chceme, aby sa kváder pohyboval rovnomerne rýchlosťou $\vec{v}$, musíme veľkosť sily $\vec{F}$ znížiť tak, aby kompenzovala dynamickú šmykovú treciu silu $\vec{F}_d$ (e).

V ďalších obrázkoch sme reakciu $\vec{R}$ pre lepšiu názornosť presunuli po vektorovej priamke do ťažiska kvádra a označili $\vec{F}_R$. Ak začneme na kváder pôsobiť silou $\vec{F}$ (b) a snažíme sa ho odtlačiť doľava, ako odozva vznikne **statická šmyková trecia sila** $\vec{F}_s$, ktorá smeruje vpravo a kompenzuje silu $\vec{F}$. Kváder je stále v pokoji. So zväčšovaním sily $\vec{F}$ narastá aj sila $\vec{F}_s$ (c) až po určitú kritickú hodnotu, kedy sa kváder "trhne", stratí svoj pokojový kontakt s podložkou a začne sa so zrýchlením $\vec{a}$ pohybovať smerom vľavo (d). V tomto prípade už ale kváder brzdí **dynamická (kinetická) šmyková trecia sila** $\vec{F}_d$, ktorá má menšiu veľkosť ako najväčšia prípustná hodnota veľkosti statickej šmykovej trecej sily pôsobiacej len v pokoji. Ak by sme chceli, aby sa kváder pohy-

boval rovnomerne, museli by sme v okamihu pohnutia kvádra veľkosť našej pôsobiacej sily znížiť.



Obrázok 5.2: Meranie šmykovej trecej sily od začiatku pôsobenia, kedy je kváder v pokoji cez začiatok pohybu až po približne rovnomerný pohyb.

Obrázok 5.2 ukazuje závislosť zväčšujúcej sa pôsobiacej sily na kváder, ktorý chceme uviesť do pohybu, až do času, kedy nastane "trhnutie" kvádra a následné zmenšenie pôsobiacej sily, keďže chceme kváder tlačiť približne rovnomerne.

Výsledky nášho myšlienkového experimentu môžeme zhrnúť nasledujúco:

- Ak začneme pôsobiť silou $\vec{F}$ na teleso, ktoré ostáva v pokoji, statická šmyková trecia sila $\vec{F}_s$ pôsobiaca na teleso má rovnakú veľkosť ako priemet sily $\vec{F}$ do podložky a je voči nej opačne orientovaná.

- Veľkosť sily $\vec{F}_s$ dosahuje maximálnu hodnotu $F_{s,max}$ danú vzťahom

$$F_{s,\max} = \mu_s F_n \ , \tag{5.1}$$

  kde μ_s je **koeficient (faktor) statického šmykového trenia** a F_n je veľkosť normálovej tlakovej sily, ktorou je teleso pritlačované k podložke (veľkosť je taktiež rovná sile, ktorou pôsobí podložka na teleso). Ak prevýši veľkosť našej pôsobiacej sily $\vec{F}$ hodnotu $F_{s,max}$, začne sa teleso pohybovať po podložke.

- Keď sa teleso dá do pohybu a budeme na neho pôsobiť takou silou $\vec{F}$, aby sa pohybovalo približne rovnomerne, klesne veľkosť šmykovej trecej sily z $F_{s,max}$ na hodnotu F_d, ktorá je určená vzťahom

$$F_d = \mu_d F_n \ , \tag{5.2}$$

  kde μ_d je **koeficient (faktor) dynamického (kinetického) šmykového trenia**. Túto veľkosť F_d má dynamická trecia sila v priebehu celého pohybu.

Podľa **Amontonovovho – Coulombovho zákona** veľkosť trecej sily pri šmykovom trení nezávisí od veľkosti styčnej plochy a je úmerná len veľkosti normálovej sily F_n, ktorú v predchádzajúcom myšlienkovom experimente predstavuje tiažová sila $\vec{F}_G = m\,\vec{g}$. Treba ešte zdôrazniť, že predchádzajúce rovnice nemajú vektorový charakter, koeficienty μ_s a μ_d sú bezrozmerné a zisťujú sa experimentálne. Hodnoty koeficientov závisia od vlastností ako telesa, tak aj podložky, takže zvykneme hovoriť o koeficientoch trenia medzi podložkou a telesom alebo medzi dvoma materiálmi (napr. hodnota koeficientu statického šmykového trenia μ_s medzi oceľou a ľadom je $0{,}027$). Taktiež predpokladáme, že hodnota koeficientu dynamického trenia μ_d nezávisí od rýchlosti pohybu telesa po podložke. Statické trenie medzi ľadom a podrážkou topánky je častokrát veľmi malé a nezabráni pošmyknutiu. Preto si statické trenie často zvyšujeme posypaním ľadu pieskom, prípadne štrkom či popolom. Na druhej strane trenie minimalizujeme, keď styčné plochy vzájomne sa pohybujúcich telies namažeme vrstvou maziva.

So silou šmykového trenia je totožná maximálna ťažná sila pohybového mechanizmu. Pri väčšej sile sa začnú kolesá na podložke šmýkať, takže z hľadiska pohybu bude už táto sila menej účinná. Ak n je počet kolies ťažného mechanizmu, z nich je m kolies poháňaných $\vec{F}_G$ je tiažová sila mechanizmu, potom celková sila trenia

$$T = \frac{\mu_s m\,F_G}{n} = F_{\max} \tag{5.3}$$

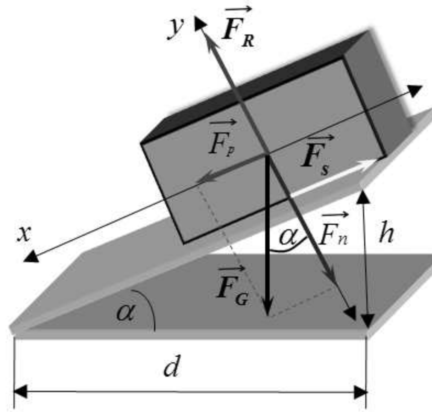
je rovná maximálnej ťažnej sile pohybového mechanizmu.

V ďalšom sa pokúsime zmerať koeficient statického šmykového trenia medzi kvádrom a podložkou. Je niekoľko možností, ako určiť hľadaný koeficient statického šmykového trenia. Jednou z nich by mohlo byť využitie silomeru a odmeranie veľkosti pôsobiacej sily v momente, kedy sa kváder dá do pohybu (obr. 5.1(c)). Zo znalosti hmotnosti kvádra a využitím vzťahu (5.1) by sme určili hľadaný koeficient.

Iným spôsobom riešenia tejto úlohy bez silomeru a znalosti hmotnosti kvádra je využitie naklonenej roviny. Ak by bolo možné podložku (napr. stôl) postupne nakláňať, pri určitom uhle sa kváder na stole pohne. Rozoberieme si túto situáciu z fyzikálneho hľadiska.

Na obrázku 5.3 je znázornený kváder na naklonenej rovine v momente, kedy sa práve začína pohybovať. Na kváder bude pôsobiť tiažová sila $\vec{F}_G$, tlaková

sila od podložky $\vec{F}_R$ v smere kolmom na naklonenú rovinu a trecia sila $\vec{F}_s$ v smere pozdĺž naklonenej roviny.



Obrázok 5.3: Kváder na naklonenej rovine a znázornenie síl, keď je kváder v pokoji ($F_P = F_S$) pri rovnomernom pohybe.

Keďže je kváder tesne pred začatím pohybu v pokoji, musí podľa II. Newtonového pohybového zákona platiť, že výslednica síl pôsobiacich na kváder je rovná nule

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_R + \vec{F}_s = m\,\vec{a} = 0\ . \tag{5.4}$$

Túto rovnicu budeme riešiť zvlášť pre x-ovú a y-ovú zložku. Pre x-ovú zložku môžeme predchádzajúcu vektorovú rovnicu prepísať do tvaru pre veľkosti síl

$$\sum F_x = F_p - F_s = m\,a = 0\ , \tag{5.5}$$

kde F_p predstavuje veľkosť priemetu tiažovej sily $\vec{F}_G$ do smeru osi x ($F_p = F_G \sin\alpha$). Pre y-ovú zložku dostávame

$$\sum F_y = F_R - F_n = 0\ , \tag{5.6}$$

kde F_n je normálová sila a predstavuje veľkosť priemetu tiažovej sily $\vec{F}_G$ do smeru osi y ($F_n = F_G \cos\alpha$). Keďže pohyb kvádra je realizovaný vždy len v smere osi x (po splnení istých podmienok), bude predchádzajúca rovnica vždy rovná nule, to znamená, že normálová sila $\vec{F}_n$ je vždy vykompenzovaná reakciou podložky $\vec{F}_R$. V závislosti od toho, ako sa bude kváder pohybovať, bude pravá

strana rovnice (5.5) nenulová (v prípade zrýchleného pohybu so zrýchlením $\vec{a}$) alebo tak ako v našom prípade rovná nule (rovnomerný pohyb kvádra, prípadne kváder je v pokoji). V okamihu, kedy sa kváder začína pohybovať, nadobúda veľkosť statickej šmykovej trecej sily $\vec{F}_s$ maximálnu hodnotu, teda $F_{s,max} = \mu_s F_n$, kde $F_n = F_G \cos\alpha$. Úpravou rovnice (5.5) teda dostávame

$$F_p = F_{s,max} \ , \tag{5.7}$$

$$F_G \sin\alpha = \mu_s F_G \cos\alpha \ , \tag{5.8}$$

odtiaľ,

$$\mu_s = \tan\alpha \ . \tag{5.9}$$

Ako teda jednoducho určiť hodnotu súčiniteľa šmykového trenia μ_s? Stačí zmerať hodnoty d a h charakterizujúce naklonenú rovinu (obr. 5.3), a tak vypočítať $tan\,\alpha = h/d$, ktorý predstavuje hodnotu koeficientu statického šmykového trenia.

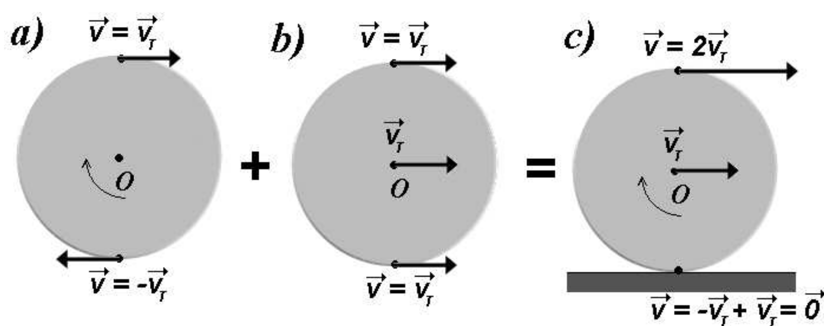
5.2 Valivé trenie

Keďže sila trenia spomaľuje pohyb, snažíme sa ju zmenšiť. Preto sa medzi trecie plochy často umiestňujú guľôčky alebo valčeky, pretože sila valivého odporu je ďaleko menšia ako sila šmykového trenia (tento poznatok sa využíva v ložiskách). Pod valivým pohybom rozumieme taký pohyb, pri ktorom sa teleso otáča okolo okamžitej osi danej dotykovou priamkou na povrchu druhého telesa (napr. podložke). Ak budeme pozorovať pohyb bicyklového kolesa, ktoré sa pohybuje stálou rýchlosťou (presnejšie povedané geometrický stred kolesa sa pohybuje stálou rýchlosťou) po priamej dráhe a neprešmykuje, môžeme tento pohyb považovať za valivý pohyb. V prípade valenia kolesa platí vzťah

$$v_T = \omega R \ , \tag{5.10}$$

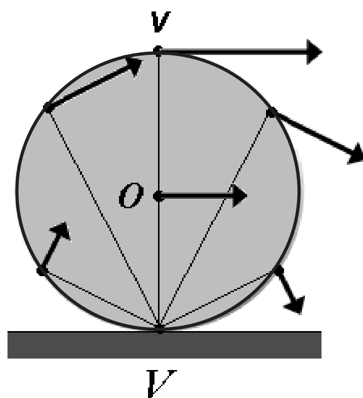
kde v_T predstavuje obvodovú rýchlosť pohybu stredu kolesa, ω je uhlová rýchlosť otáčania kolesa okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa, ktorá je rovnobežná s podložkou a R je polomer kolesa.

Ako ukazuje obrázok 5.4, môžeme tento pohyb chápať aj ako zloženie posuvného a otáčavého pohybu kolesa. Pri otáčavom pohybe, kedy os otáčania je v pokoji, ľubovoľný bod na vonkajšom obvode kolesa má obvodovú rýchlosť v_T danú vzťahom (5.10). Všetky body kolesa majú rovnakú uhlovú rýchlosť



Obrázok 5.4: Valenie kolesa ako zloženie a) otáčavého a b) posuvného pohybu.

ω. Pri posuvnom pohybe (bez otáčania) sa všetky body kolesa pohybujú rovnakou rýchlosťou v_T. Zložením týchto dvoch pohybov dostaneme valivý pohyb. Zaujímavosťou je, že body nachádzajúce sa v blízkosti dotyku kolesa s podložkou sú takmer v pokoji, zatiaľ čo body na vrchole kolesa sa pohybujú najväčšou rýchlosťou $v = 2\,v_T$ (obr. 5.4).



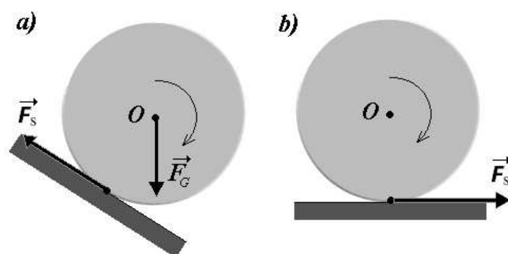
Obrázok 5.5: Valivý pohyb kolesa môžeme chápať aj ako otáčavý pohyb okolo osi, ktorá v každom okamihu prechádza bodom V dotyku podložky s kolesom.

Iný spôsob pohľadu na valivý pohyb ukazuje obrázok 5.5. Tento pohyb môžeme totiž interpretovať ako otáčanie okolo okamžitej osi, ktorá prechádza bodom dotyku kolesa V s podložkou a je kolmá na rovinu kolesa. Okamžité rýchlosti jednotlivých bodov valiaceho sa kolesa sú na obrázku 5.5 označené šípkami. Dá sa ukázať, že uhlová rýchlosť otáčania sa kolesa bicykla okolo osi prechádzajúcej v mieste dotyku kolesa s podložkou, ktorú vníma pozorovateľ

v pokoji je taká istá, ako uhlová rýchlosť, ktorú vníma cyklista pri otáčaní kolesa okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa.

Aj pri valivom pohybe zohrávajú úlohu trecie sily. Je vôbec možné, aby sa koleso otáčalo po dokonale hladkej podložke? Ak by sme roztočili koleso uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ a udelili mu vodorovnú rýchlosť veľkosti $v = \omega\, R$, kde R je polomer kolesa, možnože by sa to podarilo tak, aby v mieste dotyku kolesa s podložkou koleso neprekĺzavalo a nešmýkalo sa po podložke. Podobným spôsobom môžeme uviesť koleso do valivého pohybu bez kĺzania i v prípade, že podložka nebude dokonale hladká.

Ak by sa koleso pohybovalo po podložke rovnomerne (pričom zatiaľ zanedbávame valivý odpor podložky proti pohybu) a žiadna ďalšia vodorovná sila by pohyb neudržiavala, musela by byť aj statická trecia sila nulová. Iná situácia však nastane, keď sa pokúsime zmeniť postupnú alebo uhlovú rýchlosť kolesa. V tomto prípade však musíme na koleso pôsobiť vodorovnou silou a pripustiť, že sa koleso v mieste dotyku s podložkou môže aj šmýkať. Pokiaľ k šmyku nedôjde, bude podložka pôsobiť statickou trecou silou $\vec{F}_s$, ktorá bude smerovať „proti snahe“ kolesa prešmykovať. Ak k šmyku dôjde, dynamická trecia sila $\vec{F}_d$ bude namierená proti skutočnému sklzu.



Obrázok 5.6: a) Valenie kolesa po naklonenej rovine bez prešmykovania a b) po vodorovnej podložke s narastajúcou uhlovou rýchlosťou. (Ak by sa koleso šmýkalo, pôsobila by v bode dotyku kolesa s podložkou sila dynamického trenia F_d.

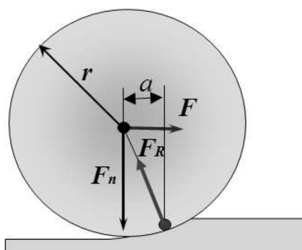
Na obrázku 5.6 je znázornené koleso, ktoré sa valí po naklonenej rovine (obr. 5.6(a)) a po vodorovnej podložke (obr. 5.6(b)). V ťažisku kolesa pôsobí tiažová sila $\vec{F}_g$, ktorej rameno vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu stredom kolesa je nulové, takže aj jej zodpovedajúci moment sily je nulový. Tiažová sila teda nebude prispievať k roztáčaniu kolesa, iba sa bude snažiť v prípade obrázku 5.6(a) šmýkať koleso po naklonenej rovine. V bode P však bude pô-

sobiť na koleso trecia sila smerujúca proti "tendencii k šmyku", t. j. nahor pozdĺž naklonenej roviny. Jej rameno vzhľadom na os otáčania je nenulové (má veľkosť polomeru kolesa), a teda vzhľadom k osi vedenej stredom kolesa moment trecej sily bude roztáčať koleso. Pri pohybe kolesa po vodorovnej podložke narastajúcou uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ (obr. 5.6(b), napr. prudký rozjazd auta na zľadovatenom parkovisku), sa spodná časť kolesa snaží prekĺznuť doľava. Trecia sila v bode dotyku podložky s kolesom bude smerovať proti očakávanému smeru sklzu, t. j. vpravo.

Doteraz sme uvažovali dokonalý kontakt medzi kolesom a podložkou, po ktorej by sa koleso v prípade rovnomerného pohybu po vodorovnej podložke valilo bez trenia. V skutočnosti však v dôsledku miernych deformácií oboch objektov (a posunu reakcie podložky oproti priamke prechádzajúcej stredom kolesa) vzniká valivý odpor podložky proti pohybu kolesa. Pohyb kolesa môže nastať len vtedy, keď moment reakcie vzhľadom na bod dotyku kolesa s podložkou ($F_n\, a$) bude vykompenzovaný momentom ťažnej sily ($F\, r$), t. j. keď bude splnená podmienka

$$F\, r = F_n\, a, \tag{5.11}$$

kde a je vzdialenosť pôsobiska reakcie podložky od zvislej priamky prechádzajúcej stredom kolesa a r je polomer kolesa (obr. 5.7).



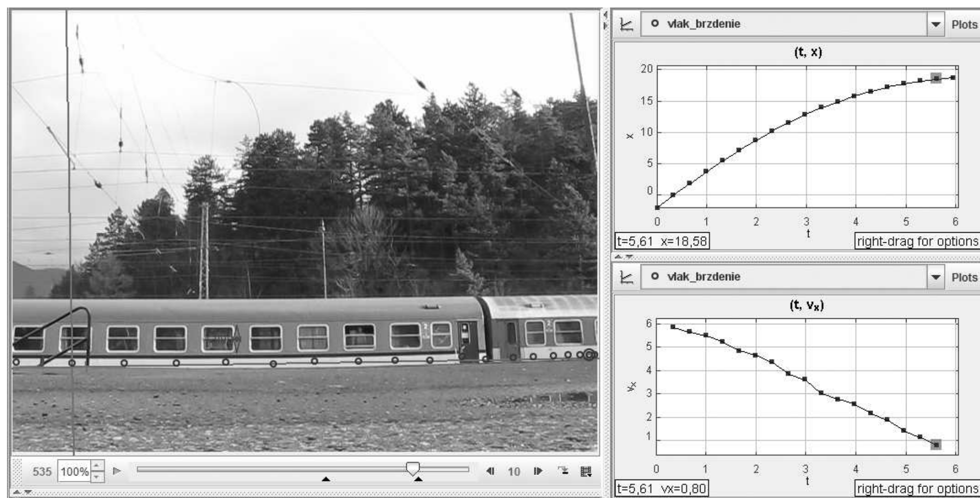
Obrázok 5.7: Vznik valivého trenia.

Z predchádzajúcej rovnice vyplýva vzťah pre valivé trenie pri valivom pohybe jedného telesa po inom

$$F = \frac{a}{r} F_n = \mu_{val} F_n\ , \tag{5.12}$$

kde μ_{val} je **koeficient (súčiniteľ) valivého trenia**, ktorý je vždy menší ako koeficient šmykového trenia, zvlášť ak sú valiace sa teleso a podložka z tvrdého a pružného materiálu. Dôsledkom toho je zhotovovanie guľových a valčekových ložísk, používanie kolies na vozidlách atď. Z predchádzajúcej definície vyplýva,

že podhustené pneumatiky automobilu zvyšujú valivé trenie. So zvyšovaním valivého trenia sa zároveň zvyšuje opotrebenie pneumatík a taktiež aj spotreba paliva (až o 5 %). Sila valivého trenia je omnoho menšia ako šmykového trenia, preto je lepšie napr. sud valiť ako šmýkať. Valivé trenie teda spomaľuje pohyb v menšej miere ako šmykové trenie.



Obrázok 5.8: Analýzou brzdenia vlaku a následným určením prejdenej dráhy a spomalenia je možné riešením pohybovej rovnice určiť koeficient šmykového trenia medzi kolesami vlaku a koľajnicami.

6 Gravitačné pole

Pojem pole patrí k najzákladnejším pojmom fyziky. Predstavuje formu interakcie (tzv. silového pôsobenia) v prostredí medzi materiálnymi objektmi ako sú častice, atómy, molekuly a zložitejšie objekty. Táto interakcia sa nedeje priamo "na diaľku" nekonečne rýchlo, ale prostredníctvom kvánt poľa konečnou rýchlosťou. Mechanizmus pôsobenia je taký, že jeden interagujúci objekt kvantá vysiela, druhý ich prijíma a opačne. Výsledkom je príťažlivá alebo odpudivá sila medzi pôsobiacimi objektmi. Interagujúce objekty predstavujú v takto opísanej schéme zdroje poľa. Samotné pole tu možno chápať ako priestor, ktorý prenáša silové pôsobenia a v ktorom prebieha výmena kvánt.

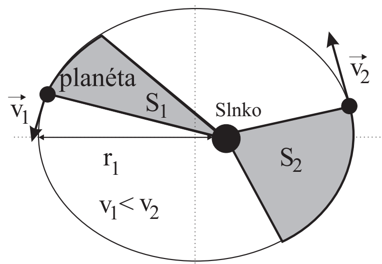
Gravitačné sily sú príťažlivé a existujú medzi všetkými materiálnymi objektmi, podlieha im všetka hmota bez výnimky, dokonca aj svetlo. Nezávisia od vlastností prostredia, nemožno ich ničím "zatieniť". Kvantami tohto poľa sú pravdepodobne častice zvané **gravitóny**, ktoré však dosiaľ neboli priamo zaregistrované. Gravitačné sily spôsobujú napr. príťažlivosť Zeme a iných nebeských telies, udržiavajú planéty na obežných dráhach okolo Slnka, Mesiac a umelé družice na obežných dráhach okolo Zeme a pod.; môžeme povedať, že udržiavajú "poriadok" vo Vesmíre. Sú "najslabšie" zo všetkých druhov síl, takže sa výraznejšie prejavujú len v makrosvete. Ich dosah je nekonečný.

6.1 Keplerove zákony

Astronómovia už od staroveku skúmali našu slnečnú sústavu a sledovali pohyby planét. Do 16. storočia panoval geocentrický názor, podľa ktorého Zem bola v strede vesmíru a všetko sa pohybovalo okolo nej. V tej dobe na základe mnohých presnejších pozorovaní M. Kopernik[1] dospel k názoru,

[1]MIKULÁŠ KOPERNIK (1473 – 1543) bol poľsko-nemecký astronóm, filozof, humanista, kanonik v katolíckej cirkvi a ekonóm; významný predstaviteľ renesančnej filozofie; nahradil

že Slnko je stredom vesmíru a planéty obiehajú okolo neho po kružniciach. Svoje pozorovania a závery spísal v diele "O obehoch nebeských telies". Nedosiahol však úplný súhlas s vypočítanými a pozorovanými polohami planét. Nový správny popis pohybu planét objavil nemecký hvezdár J. Kepler[2], ktorý spracoval dlhoročné a na tú dobu veľmi presné merania dánskeho hvezdára T. Brahe[3]. Svoje zistenia sformuloval do troch zákonov, ktoré sa dnes volajú **Keplerovými zákonmi**:



Obrázok 6.1: Pohyb planéty okolo Slnka.

- I. Keplerov zákon: Planéty obiehajú okolo Slnka po elipsách s malou výstrednosťou, pričom Slnko sa nachádza v ich spoločnom ohnisku (obr. 6.1).

- II. Keplerov zákon: Plochy opísané sprievodičom tej istej planéty, vzťahujúcim sa na stred Slnka, v rovnakých časových intervaloch sú rovnaké ($S_1 = S_2$, obr. 6.1).

- III. Keplerov zákon: Pomer druhých mocnín obežných dôb dvoch ľubovoľných planét (T_1, T_2) sa rovná pomeru tretích mocnín hlavných poloosí (r_1, r_2) ich dráh.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \, . \tag{6.1}$$

geocentrický obraz sveta heliocentrickým. Kopernikovo učenie obsahovalo kinematickú schému slnečnej sústavy, ktorá sa stala začiatkom vývinu nebeskej mechaniky a umožnila aplikovať pojmy zemskej mechaniky na vesmír.

[2]JAHANNES KEPLER (1571 – 1630) bol nemecký astronóm, fyzik, optik a matematik, objaviteľ troch základných zákonov pohybu nebeských telies. Objavom tzv. Keplerových zákonov rozriešil definitívne spor medzi heliocentrizmom a geocentrizmom v prospech Kopernikovej teórie. Keplerove zákony je možné použiť i na popis ďalších telies, ktoré sa pohybujú v gravitačnom poli Slnka, napr. umelých družíc.

[3]TYCHO BRAHE (1546 – 1601) bol význačný dánsky astronóm. Je považovaný za najlepšieho a najpresnejšieho pozorovateľa hviezdnej oblohy, ktorý bol prekonaný až šesťdesiat rokov po vynájdení ďalekohľadu.

6.2 Newtonov gravitačný zákon

Ako prvý sa skúmaním gravitačných síl vážnejšie zaoberal Isaac Newton. Je známa jeho príhoda s padajúcim jablkom, ktorá ho priviedla na myšlienku, že sila nútiaca padať telesá zvislo k Zemi je totožná so silou, ktorá núti obiehať planéty po obežných dráhach okolo Slnka, aj Mesiac okolo Zeme. V tom čase už boli známe zákonitosti pohybu planét, ktoré objavil nemecký astronóm Johannes Kepler. V nasledujúcej časti si ukážeme možný postup Newtona, ako pomocou týchto troch Keplerových zákonov odvodil všeobecne platný gravitačný zákon. Pre jednoduchosť nasledujúcich výpočtov budeme predpokladať, že planéty obiehajú okolo Slnka po kruhových dráhach s polomerom r (kružnica je elipsa s nulovou výstrednosťou). Z II. Keplerovho zákona potom vyplýva, že táto rýchlosť je konštantná a jej veľkosť je $v = 2\pi\, r/T$. Ako už vieme, pri rovnomernom pohybe telesa po kružnici jeho zrýchlenie smeruje do stredu kružnice; tangenciálne zrýchlenie sa rovná nule a celkové zrýchlenie a sa rovná normálovému zrýchleniu a_n, ktoré má veľkosť: $a_n = v^2/r$ (3.70). Ak spojíme tieto informácie spolu s III. Keplerovým zákonom: $T^2 = b\, r^3$ (b - konštanta) môžeme urobiť nasledujúce úpravy pre vyjadrenie dostredivého zrýchlenia planéty

$$a_{nP} = \frac{1}{r}\left(\frac{2\pi\, r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2\, r}{b\, r^3} = \frac{4\,\pi^2}{b}\frac{1}{r^2} = k\frac{1}{r^2}\,, \tag{6.2}$$

kde $k = \frac{4\,\pi^2}{b}$ je konštanta. Podľa II. Newtonovho pohybového zákona sily (4.1) na planétu s hmotnosťou m účinkuje sila smerujúca do stredu Slnka, ktorej veľkosť je: $F_S = m\, a_{nP} = k\, m/r^2$. Ak zoberieme do úvahy, že je to sila, ktorou pôsobí Slnko na planétu, potom to platí aj opačným smerom, teda aj planéta pôsobí na Slnko silou $F_p = k'\, M_S/r^2$. Keďže však platí III. Newtonov zákon akcie a reakcie, tieto sily musia byť rovnako veľké ($F_S = F_p$), čo dosiahneme napr. tým, že konštantu k vo vzťahu pre F_S zapíšeme ako súčin dvoch iných konštánt, pričom jedna z nich bude hmotnosť Slnka: $k = \kappa M_S$. Konečný vzťah má potom tvar

$$F = \kappa\frac{M_S\, m}{r^2}\,. \tag{6.3}$$

Tento vzťah predstavuje vyjadrenie veľkosti gravitačných síl, ktorými pôsobia na seba dve hmotné telesá.

Matematická formulácia **Newtonovho gravitačného zákona** (6.3) znie: **dve telesá s hmotnosťami M a m sa navzájom priťahujú silou F_g,**

ktorá je úmerná súčinu ich hmotností a nepriamoúmerná druhej mocnine ich vzájomnej vzdialenosti r. Vektorový zápis tohto zákona má tvar

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{M\,m}{r^3} \vec{r}\,, \tag{6.4}$$

kde $\kappa = 6,670 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$ je univerzálna gravitačná konštanta.

Rovnica (6.4) platí presne len pre hmotné body a pre homogénne gule, pri ktorých za r dosadzujeme vzdialenosť ich stredov. S veľkou presnosťou ju môžeme použiť aj pre veľké telesá (planéty), ktorých rozmery sú zanedbateľné voči ich vzájomnej vzdialenosti; za r vtedy dosadzujeme vzdialenosť ich ťažísk. Pokiaľ teda v ďalšom texte na niektorých miestach použijeme miesto pojmu "hmotné body" pojem "telesá", budú sa tu rozumieť práve takéto prípady (napr. pri popise gravitačného poľa Zeme).

6.3 Intenzita gravitačného poľa

Na popis gravitačného poľa v okolí každého hmotného telesa, či už napr. hmotného bodu alebo planéty, používame pojmy: intenzita a potenciál. Sú to trochu abstraktnejšie fyzikálne veličiny, no používajú sa pri popise každého fyzikálneho poľa.

Intenzita gravitačného poľa v okolí telesa s hmotnosťou M je vektorová veličina definovaná vzťahom

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3}\,\vec{r}\,, \tag{6.5}$$

kde $\vec{F}_g$ je sila, ktorá v danom bode poľa pôsobí na hmotný bod hmotnosti m. Jednotkou intenzity je $(N/kg = m/s^2)$.

Pomocou intenzity sa dá charakterizovať gravitačné pole v každom bode priestoru v okolí daného hmotného telesa. Ak poznáme intenzitu poľa v nejakom bode, tak $F = m\,K$ je sila, akou pole pôsobí na bod hmotnosti m. Ak porovnáme toto vyjadrenie s II. Newtonovým zákonom $F = m\,a$, tak potom **intenzita gravitačného poľa zodpovedá zrýchleniu, ktoré pole udeľuje hmotnému bodu v danom mieste** (za predpokladu, že tu nepôsobia ešte ďalšie sily).

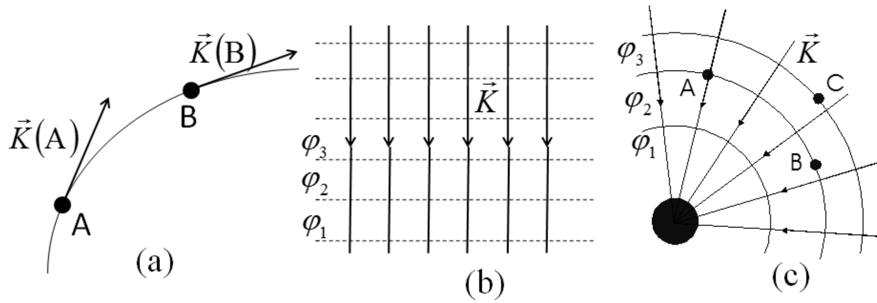
Ak do vzťahu (6.5) dosadíme parametre týkajúce sa Zeme, dostaneme zná-

mu hodnotu **tiažového zrýchlenia -** g:

$$K = g = 6,670 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \frac{5,98 \times 10^{24}\, kg}{(6\,378\,000)^2\, m^2} = 9,80523\; N/kg\;.$$

Intenzita gravitačného poľa na Mesiaci je $K_{Mesiac} = 1,62\; N/kg$.

Každému bodu gravitačného poľa sme priradili vektor intenzity $\vec{K}$. Na prehľadné znázornenie poľa sa zavádza pojem **siločiara**. **Siločiara je orientovaná čiara vedená tak, že dotyčnica v ktoromkoľvek jej bode má smer a orientáciu intenzity poľa v tomto bode** (obr. 6.2(a)). Pri zobrazovaní sa počet siločiar, t. j. počet siločiar prechádzajúcich jednotkovou plochou postavenou kolmo na smer siločiar, volí tak, aby bol úmerný veľkosti intenzity v danom mieste poľa. V prípade homogénneho poľa (obr. 6.2(b)) sú siločiary rovnobežné orientované priamky všade rovnakej hustoty a pre radiálne pole (obr. 6.2(c)) majú smer kolmo na hmotné teleso.



Obrázok 6.2: a) K definícii siločiary. b) Homogénne gravitačné pole. c) Siločiary hmotného bodu - radiálne gravitačné pole.

6.4 Potenciál gravitačného poľa

Už v časti dynamika sme zaviedli pojem súvisiaci s tiažovým poľom Zeme a to bola potenciálna energia. Potenciálnu energiu sme definovali ako energiu, ktorú má teleso vo výške h nad povrchom Zeme: $E_p = m\,g\,h$ (4.33). Tento vzťah platí len pre homogénne gravitačné pole (napr. v blízkosti povrchu Zeme), kde je konštantná intenzita gravitačného poľa. Podobne aj v nehomogénnom (radiálnom) gravitačnom poli definujeme potenciálnu energiu telesa hmotnosti m, no pri výpočte musíme uvažovať zmenu intenzity gravitačného poľa objektu s hmotnosťou M.

Pri presune daného telesa z bodu B do bodu C (obr. 6.2(c)) v gravitačnom poli konáme prácu, ktorá je určená rozdielom jeho **potenciálnych energií** v daných miestach. Túto prácu si môžeme vyjadriť nasledujúco

$$W = \int_{r_B}^{r_C} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_B}^{\infty} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{r_C}^{\infty} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_p(r_B) - E_p(r_C) \ , \qquad (6.6)$$

pričom sme využili, rozdelenie integračných hraníc v integráli. Pomocou predošlého vyjadrenia môžeme potenciálnu energiu telesa v bode B upraviť aj na nasledujúci tvar

$$E_p(B) = -\int_{\infty}^{r_B} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \int_{\infty}^{r_B} \kappa \frac{M}{r^3} \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\,m \int_{\infty}^{r_B} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \ , \qquad (6.7)$$

kde sme využili vzťah pre intenzitu gravitačného poľa (6.5). Ako je vidieť vo všeobecnom prípade, potenciálna energia nie je funkciou výšky, ale intenzity gravitačného poľa.

Ako už bolo spomenuté, na popis poľa používame okrem intenzity aj **potenciál gravitačného poľa -** φ. Pokiaľ intenzita je definovaná ako vektorová veličina, tak potom potenciál je skalárna veličina charakterizujúca gravitačné pole. **Potenciál je definovaný ako podiel potenciálnej energie hmotného bodu v danom mieste a hmotnosti tohto hmotného bodu**

$$\varphi = \frac{E_p}{m} \ . \qquad (6.8)$$

Ak do predošlého vzťahu dosadíme vyjadrenie potenciálnej energie zo vzťahu (6.7), potom sa dá vyjadriť potenciál radiálneho gravitačného poľa v hociktorom mieste - r_B, čo je vzdialenosť bodu B od zdroja gravitačného poľa, ako:

$$\begin{aligned} \varphi(r_B) &= -\int_{\infty}^{r_B} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad (6.9) \\ &= \int_{\infty}^{r_B} \kappa \frac{M}{r^3} \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \kappa\, M \int_{\infty}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \kappa\, M \left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r_B} = -\kappa \frac{M}{r_B} \ . \end{aligned}$$

Množiny bodov poľa, v ktorých má potenciál rovnakú hodnotu, voláme **potenciálne hladiny** alebo **ekvipotenciálne plochy**. V homogénnom gravitačnom poli sú ekvipotenciálne hladiny vodorovné čiary (obr. 6.2(b)) a pri radiálnom poli sú ekvipotenciálne plochy guľové so stredom v bode zdroja poľa (obr. 6.2(c)).

6.5 Vzťah intenzity a potenciálu gravitačného poľa

V predchádzajúcom odseku bolo uvedené, že intenzita a potenciál gravitačného poľa navzájom súvisia integrálnym vzťahom. Daný vzťah si môžeme zapísať nasledujúco

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \,. \tag{6.10}$$

Na základe tohto vzťahu odvodíme inverzný, diferenciálny vzťah medzi $\vec{K}$ a φ. Pre totálny diferenciál potenciálu z predošlého vzťahu vyplýva

$$\mathrm{d}\varphi = -\vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = K_x \,\mathrm{d}x + K_y \,\mathrm{d}y + K_z \,\mathrm{d}z \,. \tag{6.11}$$

Keďže potenciál je funkciou priestorových súradníc $\varphi(x, y, z)$, platí pre jeho totálny diferenciál bežný definičný vzťah z diferenciálneho počtu

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z \,. \tag{6.12}$$

Predošlé dva vzťahy možno spojiť pomocou **Hamiltonovho diferenciálneho operátora nabla -** ∇, ktorý je definovaný v kartézskych súradniciach ako

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k} \,. \tag{6.13}$$

Aplikáciu tohto operátora na skalárnu funkciu nazývame **gradientom** danej funkcie: $\nabla\varphi = grad\,\varphi$. Gradient skalárnej funkcie je vektorová funkcia, ktorej hodnota sa v každom bode poľa rovná maximálnej zmene skalárnej funkcie na jednotku dĺžky v danom bode a má smer jej maximálneho stúpania. Priamym výpočtom zistíme, že platí

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi = (\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{r} = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\vec{k})\cdot(\mathrm{d}x\,\vec{i} + \mathrm{d}y\,\vec{j} + \mathrm{d}z\,\vec{k}) = \\ = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z = (grad\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{r}\end{aligned}$$

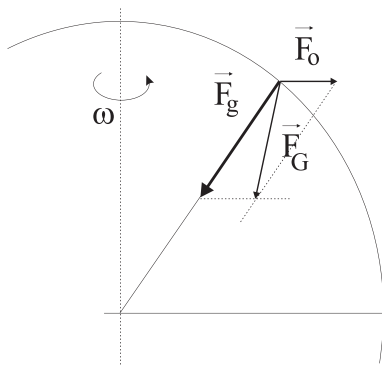
a porovnaním vzťahu (6.11) s predošlým vzťahom dostaneme

$$\vec{K} = -\nabla\varphi(r) \,. \tag{6.14}$$

z ktorého vyplýva, že **intenzita gravitačného poľa je rovná zápornému gradientu potenciálu**.

6.6 Gravitácia v okolí Zeme

Zjednodušme si situáciu. Predpokladajme, že Zem je homogénna guľa s hmotnosťou M a polomerom $R = 6378\,km$. Potom podľa Newtonovho gravitačného zákona vzťah $F_g = m\,K$ (6.3) predstavuje silu, ktorou Zem pôsobí na teleso hmotnosti m vo vzdialenosti $r > R$ od stredu Zeme. No v skutočnosti sa teleso (dom, most, človek, ...) nachádza na povrchu Zeme a pohybuje sa spolu s ňou. Práve preto nemôžeme používať daný vzťah na výpočet gravitačnej sily na naše teleso. Používame potom pojem tiažová sila $F_G = m\,g$. Vysvetlime si teraz rozdiel medzi gravitačným zrýchlením K a tiažovým zrýchlením g. Veľkosť tiažovej a gravitačnej sily Zeme sa však líši a to z nasledujúcich dôvodov:



Obrázok 6.3: Vysvetlenie rozdielu medzi gravitačnou a tiažovou silou.

1. Gravitačná sila závisí od vzdialenosti telesa od stredu Zeme, ale Zem nie je dokonalá guľa, je to elipsoid sploštený na póloch. Tiažové zrýchlenie rastie smerom od rovníka k pólu - mení sa so zemepisnou šírkou.

2. Hustota Zeme sa mení v jednotlivých oblastiach pod povrchom Zeme. Preto tiež tiažové zrýchlenie je rôzne na rôznych miestach Zeme.

3. Najväčší vplyv má však rotácia Zeme. Ak sa pozrieme na obrázok 6.3, vidíme, že na teleso na povrchu Zeme pôsobí gravitačná sila F_g. Ale pretože Zem rotuje uhlovou rýchlosťou ω, pôsobí na toto teleso i odstredivá sila $F_O = m\,\omega\,r$. Uhlová rýchlosť rotácie Zeme je na všetkých zemepisných šírkach rovnaká, no polomer otáčania $r < R$ sa smerom od rovníku $(r = R)$ zmenšuje. Výsledná tiažová sila pôsobiaca na teleso je daná

vektorovým súčtom gravitačnej a odstredivej sily, ak zanedbáme ostatné menej významné sily.

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_o \qquad \vec{g} = \vec{K} + \vec{a}_o \; . \tag{6.15}$$

Napríklad na rovníku je gravitačné zrýchlenie $K = 9,83\ m/s^2$, no výsledná veľkosť tiažového zrýchlenia vplyvom odstredivej sily je $g = 9,81\ m/s^2$.

6.7 Pohyby v tiažovom poli Zeme

V tejto časti budeme uvažovať základné pohyby telies v tiažovom poli Zeme v malej vzdialenosti od zemského povrchu, kde je tiažové pole homogénne a pôsobiacu tiažovú silu možno vyjadriť výrazom $F_G = G = m\,g$. Pri týchto pohyboch nebudeme uvažovať žiadne odporové sily. Medzi tieto pohyby patria: voľný pád, vrh zvislý nahor, vodorovný vrh a šikmý vrh. V nasledujúcej časti (Kozmické rýchlosti) budeme skúmať pohyby vo veľkej výške nad zemským povrchom, kde je už radiálne gravitačné pole a pre silu platí Newtonov gravitačný zákon (6.4).

Pre všeobecný pohyb telesa v homogénnom gravitačnom poli platí nasledujúci vektorový vzťah

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\vec{K} \; , \tag{6.16}$$

kde pre intenzitu homogénneho gravitačného poľa platí $\vec{K} = (0, 0, -g)$. Pre x-ovú a z-ovú zložku zrýchlenia potom platí

$$a_x = 0 \qquad a_z = -g \; , \tag{6.17}$$

pričom pohyb v smere osi y neuvažujeme, lebo pre riešenie týchto typov pohybov úplne vystačíme s rovinným riešením.

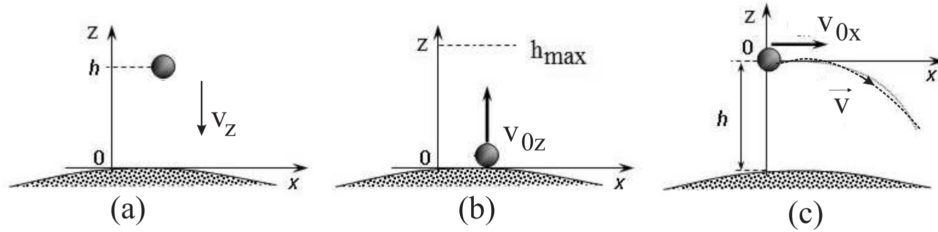
Z rovníc (6.17) vyplýva, že v smere osi x môžeme očakávať pohyb rovnomerný a v smere osi z pohyb rovnomerne zrýchlený so zrýchlením $-g$. S priamočiarym rovnomerným a rovnomerne zrýchleným pohybom sme sa už ale stretli v kapitole 3.2.1, takže rýchlosti hmotného bodu v tiažovom poli Zeme vypočítame z integrálneho vzťahu $v = -\int g\,\mathrm{d}t$, ktorého výsledok sú rýchlosti v jednotlivých smeroch osí x a z

$$v_x = v_{0x} \qquad v_z = v_{0z} - g\,t \; , \tag{6.18}$$

kde v_{0x} je počiatočná rýchlosť v smere osi x a v_{0z} je počiatočná rýchlosť v smere osi z. Keď poznáme vyjadrenia rýchlosti v závislosti od času, dráhu v smere jednotlivých osí vypočítame použitím integrálneho vzťahu (3.15) $s = \int v dt$. Keďže ide o neurčitý integrál, jeho výsledok je správny až vzhľadom na integračnú konštantu C. Ak uvážime integračné konštanty, ktoré sa určujú z počiatočných podmienok pre dráhy v čase $t = 0\,s$, môžeme vo všeobecnosti pre dráhy v smere osí x a z napísať

$$x = x_0 + v_{0x}\,t \qquad z = z_0 + v_{0z}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \,. \tag{6.19}$$

kde x_0, z_0 je počiatočná dráha v smere osi x resp. osi z.



Obrázok 6.4: (a) Voľný pád. (b) Vrh zvislý nahor. (c) Vodorovný vrh.

Vzťahy (6.18) a (6.19) sú základné všeobecné vzťahy popisujúce každý typ rovinného pohybu v homogénnom gravitačnom poli. Na základe týchto vzťahov a vhodných počiatočných podmienok v čase $t = 0\,s$ špecifických pre každý typ pohybu môžeme rovno napísať základné vzťahy pre daný typ pohybu.

6.7.1 Voľný pád

Za voľný pád považujeme taký pohyb, pri ktorom je teleso pustené z určitej výšky h nad zemským povrchom (obr. 6.4(a)). Počiatočné podmienky na začiatku takéhoto pohybu sú nasledujúce: $v_{0x} = v_{0z} = 0\ m/s$ (teleso na začiatku pohybu má nulovú rýchlosť) a $x = x_0$, $z_0 = h$. Z našich všeobecných rovníc (6.18) a (6.19) pre voľný pád dostaneme

$$x = x_0, \qquad z = h - \frac{1}{2} g\,t^2 \,, \tag{6.20}$$

$$v_x = 0\,m/s, \qquad v_z = -g\,t \,. \tag{6.21}$$

Z predošlých rovníc vyplýva, že pri voľnom páde pohyb prebieha len v smere osi z-ovej a ide o pohyb rovnomerne zrýchlený smerom nadol s počiatočnou

nulovou rýchlosťou. Zo znalosti, že teleso má pri dopade na zem nulovú výšku $z = 0\,m$ vieme určiť čas dopadu t_d a zo znalosti tohto času aj rýchlosť tesne pred dopadom v_d. Pre tieto veličiny platia nasledujúce vzťahy

$$t_d = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}, \qquad v_d = \sqrt{2\,g\,h}\;. \tag{6.22}$$

V týchto vzťahoch nevystupuje hmotnosť telesa. To ale znamená, že telesá s rôznymi hmotnosťami (napr. pierko sojky a 1 kg guľu) spustené z rovnakej výšky, by za našich predpokladov, ktoré sme si stanovili na začiatku (bezodporové prostredie a malá výška nad zemským povrchom), dopadli naraz a s rovnakými rýchlosťami. Podobný pokus urobili aj kozmonauti na Mesiaci. Reálne na Zemi to však môžeme pozorovať len vo vákuovej trubici, lebo inak by sme v prípade pierka museli zarátať aj odpor prostredia, ktorý sme neuvažovali. Od Aristotelových čias sa verilo, že ťažšie telesá padajú rýchlejšie ako ľahšie. Až Galileo Galilei[4] svojimi experimentmi, ktorými skúmal pohyb telies púšťaním zo šikmej veže v Pise dokázal, že rýchlosť telies takmer nezávisí od ich hmotnosti.

6.7.2 Vrh zvislý nahor

Vrh zvislý nahor je pohyb, keď vyhadzujeme teleso s počiatočnou rýchlosťou v_0 kolmo nahor od zemského povrchu, t. j. v smere osi z (obr. 6.4(b)). Pri tomto pohybe sú počiatočné podmienky nasledujúce: $v_{0x} = 0\ m/s$, $v_{0z} = v_0$, $x_0 = z_0 = 0\,m$. Zo všeobecných rovníc (6.18) a (6.19) pre vrh zvislý nahor dostaneme

$$x = 0\,m, \qquad z = v_0\,t - \frac{1}{2}g\,t^2\;, \tag{6.23}$$

$$v_x = 0\ m/s, \qquad v_z = v_0 - g\,t\;. \tag{6.24}$$

Z týchto rovníc vidíme, že daný pohyb je opäť len v smere osi z. Zo skúsenosti vieme, že teleso postupne spomaľuje, až nakoniec zastane v najvyššom bode svojho pohybu a potom začne voľne padať smerom nadol ako v predošlom prípade - voľný pád. Keďže teleso v najvyššom bode h_{max} má nulovú rýchlosť $v_z(h_{max}) = 0\ m/s$, dá sa z tejto informácie vypočítať aj kedy sa to stane:

[4]GALILEO GALILEI (1564 – 1642) bol taliansky filozof, fyzik, astronóm, matematik obdobia renesancie, jeden zo zakladateľov súčasnej experimentálno-teoretickej prírodovedy.

$t_v = v_0/g$. Teraz ak do vzťahu pre dráhu - výšku z dosadíme za čas t čas t_v, potom pre maximálnu výšku h_{max} dostaneme po úpravách vzťah

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2\,g}\,. \tag{6.25}$$

6.7.3 Vodorovný vrh

O vodorovnom vrhu hovoríme, pokiaľ telesu v určitej výške h nad zemským povrchom udelíme počiatočnú rýchlosť v_0 rovnobežne so zemským povrchom (obr. 6.4(c)). Tento pohyb tiež možno vyšetrovať ako súčet dvoch pohybov, a to voľného pádu (os z) a rovnomerného pohybu v smere pôvodnej rýchlosti (os x). Tiež však možno použiť všeobecné rovnice (6.18) a (6.19) s nasledujúcimi počiatočnými podmienkami: $v_{0x} = v_0$, $v_{0z} = 0\ m/s$, $x_0 = 0\,m$, $z_0 = h$. Teda po dosadení dostaneme

$$x = v_0\,t, \qquad z = h - \frac{1}{2}g\,t^2\,, \tag{6.26}$$

$$v_x = v_0, \qquad v_z = -g\,t\,. \tag{6.27}$$

V prípade tohto pohybu sú zaujímavé dve informácie: čas t_d a miesto dopadu x_d. V prípade času dopadu t_d bude jeho z-ová súradnica nulová a z predošlej rovnice po úprave dostaneme

$$t_d = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,, \tag{6.28}$$

čo je rovnaký čas dopadu ako pri voľnom páde (6.22). Vzdialenosť dopadu x_d už teraz určíme jednoducho, lebo poznáme čas letu alebo dopadu telesa (neuvažujeme odpor vzduchu) a počiatočnú rýchlosť v_0 v smere osi x a to nasledovne

$$x_d = v_0\,\sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,. \tag{6.29}$$

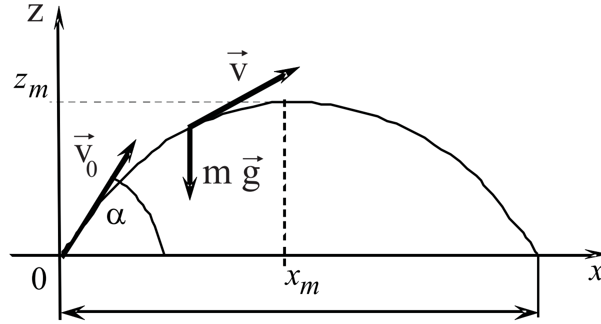
6.7.4 Šikmý vrh

O šikmom vrhu hovoríme vtedy, keď je teleso vrhnuté počiatočnou rýchlosťou v_0 v rovine xz pod určitým uhlom α s osou x, t. j. so zemským povrchom (obr. 6.5, napríklad hod oštepom). Tento pohyb tiež možno vyšetrovať ako súčet dvoch pohybov a to vrh zvislý nahor (os z) a rovnomerného pohybu

v smere osi x. Tiež však možno použiť všeobecné rovnice (6.18) a (6.19) s nasledujúcimi počiatočnými podmienkami: $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$, $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$, $x_0 = 0\,m$, $z_0 = 0\,m$. Teda po dosadení dostaneme

$$x = v_0\, t \cos(\alpha), \qquad z = v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2 , \tag{6.30}$$

$$v_x = v_0 \cos(\alpha), \qquad v_z = v_0 \sin\alpha - g\, t . \tag{6.31}$$



Obrázok 6.5: Šikmý vrh.

Teleso pri svojom pohybe postupne zvyšuje svoju výšku a najvyššiu výšku dosahuje práve vtedy, keď z-ová zložka rýchlosti je nulová, teda: $v_0 \sin\alpha = g\, t_m$. Z tohto vzťahu sa dá určiť čas dosiahnutia najvyššej výšky ako

$$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} . \tag{6.32}$$

Vzdialenosť dopadu pri šikmom vrhu nám určuje x-ová súradnica. Keď v rovnici pre x dosadíme za čas $t_d = 2\, t_m$, pre vzdialenosť dopadu dostaneme

$$l = \frac{2\, v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) . \tag{6.33}$$

6.8 Kozmické rýchlosti

Pokiaľ chceme, aby delová guľa vystrelená z dela neustále lietala okolo Zeme tesne nad jej povrchom, treba jej na začiatku pohybu udeliť dostatočnú počiatočnú rýchlosť v_I vodorovným smerom. Ak pri tomto pohybe zanedbáme odpor vzduchu, potom podmienka, ktorú treba splniť na jej obiehania je, aby odstredivá sila: $F = m\, a_n$ (a_n viď (3.70)) bola rovnako veľká ako príťažlivá tiažová sila, ktorou na ňu pôsobí Zem. Tiažová sila však pri obiehaní v malej

výške h (výšku h môžeme považovať za malú, ak $h << R_Z = 6378\,km$) je daná vzťahom: $G = m\,g$. Musí teda platiť

$$m\frac{v_I^2}{R_Z} = m\,g\ , \tag{6.34}$$

lebo polomer obežnej dráhy družice je prakticky zhodný s polomerom Zeme. Na základe jednoduchej úpravy dostaneme pre počiatočnú - obežnú rýchlosť - **I. kozmickú rýchlosť** vzťah

$$v_I = \sqrt{R_Z\,g} \approx 7{,}9\,km/s\ .$$

Za aký čas by teda obletela delová guľa okolo Zeme? To sa dá už ľahko vypočítať - veď poznáme rýchlosť družice v_I i polomer jej obežnej dráhy R_Z. Výpočtom vychádza $T = 2\,\pi\,R_Z/v_I \approx 90\,min$. Za rovnakú dobu obletel r. 1961 Zem aj prvý kozmonaut Jurij Gagarin.

Obiehanie delovej gule okolo Zeme je aj v súčasnosti fikcia, no život bez geostacionárnych družíc by sme si nevedeli predstaviť. Takéto družice, "stojace" nad tým istým miestom zemského povrchu zabezpečujú množstvo funkcií: satelitnú televíziu a telefonovanie, GPS, družicové zábery zemskej atmosféry a množstvo ďalších funkcií. Geostacionárna družica obieha okolo Zeme súhlasne s rotáciou Zeme a jej perióda obiehania teda je $T = 24\,h$. Pre podmienku obiehania stacionárnej družice platí podobný vzťah ako (6.34) no s tým rozdielom, že v tomto prípade nemožno zanedbať jej výšku h nad povrchom Zeme a zmenu intenzity gravitačného poľa. Ak použijeme Newtonov gravitačný zákon (6.4), dostaneme

$$m\frac{v^2}{R_Z + h} = \kappa\frac{M_Z\,m}{(R_Z + h)^2}\ ,$$

kde $R_Z + h$ je polomer obežnej dráhy a v obežná rýchlosť. Pre **obežnú rýchlosť** potom platí

$$v^2 = \frac{\kappa\,M_Z}{R_Z + h}\ . \tag{6.35}$$

Geostacionárna dráha je kruhová dráha umelej družice umiestnenej nad zemským rovníkom vo výške $36\,000\,km$ pričom podľa predošlého vzťahu sa pohybuje rýchlosťou približne $3\,km/s$.

Akú rýchlosť musíme minimálne udeliť kozmickej rakete, aby sa dostala z dosahu zemskej gravitácie? Odpoveď všetci dobre poznáme, táto rýchlosť

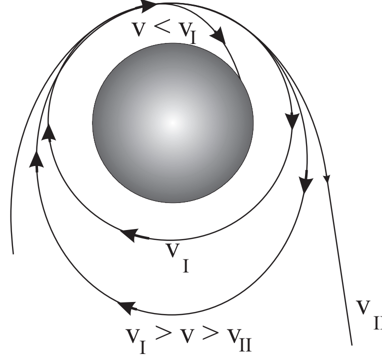
má aj pomenovanie a volá sa **II. kozmická rýchlosť** a jej hodnota predstavuje okolo $11\,km/s$. Ukážme si teraz na základe akého postupu sme dospeli k spomínanej hodnote. Pri vzďaľovaní rakety zo zemského povrchu sa koná práca, ktorej veľkosť určíme takto

$$W = \int F_g\,dr = \int_{R_Z}^{\infty} \kappa\frac{M\,m}{r^2}dr = \left[-\kappa\frac{M\,m}{r}\right]_{R_Z}^{\infty} = \kappa\frac{M\,m}{R_Z}\;. \qquad (6.36)$$

Integračná hranica ∞ zodpovedá v podstate miestu, kde gravitačné pole Zeme pôsobiace na raketu je už zanedbateľné so silovým pôsobením iných nebeských telies. Ak premiestňujeme napr. teleso hmotnosti 1 kg, potrebujeme energiu približne 60 MJ. Celá táto energia alebo práca, ktorú treba dodať, sa hradí z kinetickej energie telesa, rakety. Ak dáme do rovnosti kinetickú energiu $E_k = 1/2\,m\,v^2$ a potrebnú prácu zo vzťahu (6.36), dostaneme vyjadrenie pre **II. kozmickú rýchlosť**

$$v_{II} = \sqrt{\kappa\frac{2\,M}{R_Z}} = \sqrt{2}\,v_I \;= 11,2\,km/s\;. \qquad (6.37)$$

Uvedená práca je konečná, a to napriek tomu, že dráha je "nekonečne" veľká. To súvisí, samozrejme s tým, že gravitačná sila klesá so štvorcom vzdialenosti.



Obrázok 6.6: I. a II. kozmická rýchlosť (súhrnne).

Dôležitými veličinami pre každé väčšie nebeské teleso (Slnko, planéty, mesiace) sú I. a II. kozmická rýchlosť. I. kozmická rýchlosť v_I je rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu v horizontálnom smere tesne nad povrchom planéty, aby obiehalo okolo nej po kruhovej dráhe ako umelá družica. II. kozmická rýchlosť v_{II} predstavuje tzv. únikovú rýchlosť z povrchu planéty. Je to minimálna rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu z povrchu planéty smerom zvislo nahor, aby natrvalo opustilo jej gravitačné pole planéty.

7 Mechanika tuhého telesa

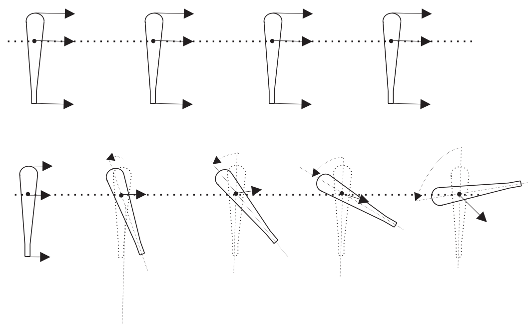
V tejto kapitole sú popísané základy dynamiky sústavy hmotných bodov a tuhého telesa. Zovšeobecnia sa vzorce pre pohyb, rýchlosť a zrýchlenie takýchto sústav pomocou ťažiska. Dozvieme sa, čo sa rozumie pod pojmom ťažisko a ako sa vypočíta jeho poloha. Rozšírime si platnosť II. Newtonovho pohybového zákona pomocou I. a II. impulzovej vety. Zistíme, ako vypočítať rotačnú energiu telesa pomocou momentu zotrvačnosti. Naučíme sa počítať moment zotrvačnosti a použiť Steinerovu vetu. A nakoniec, keďže s pohybom okolo osi sa stretávame takmer na každom kroku, preberieme si niekoľko prípadov z praxe pre kmitavý pohyb a valivý pohyb.

Doteraz používaný prístup, v ktorom skutočný objekt bol nahradený hmotným bodom, neumožňuje riešiť všetky úlohy dynamiky. Pre prípady, keď rozmery objektov nemôžu byť zanedbané, je užitočné zaviesť model sústavy hmotných bodov. Pomocou takého modelu je možné napr. skúmať pohyb sústavy telies, v ktorej každé teleso je nahradené hmotným bodom. Predstava sústavy hmotných bodov je vhodná aj pre tuhé telesá a látky v kvapalnom a plynnom stave, v ktorých stavebné častice (atómy, molekuly), môžu byť považované za hmotné body.

Sústavou hmotných bodov rozumieme jednoduché teleso, ktoré sa môže na rozdiel od tuhého telesa, tvarovo meniť. Sústava hmotných bodov pozostáva z telies (hmotných bodov), ktoré sa navzájom voči sebe pohybujú. Pohyby jednotlivých hmotných bodov závisia od polohy ostatných bodov v priestore a sú určené pohybovými rovnicami, pre každý bod zvlášť. Tuhé teleso tvorí veľký počet hmotných bodov spojených tak, že ich vzájomná poloha sa pri pohybe telesa ako celku nemení. Pre tuhé teleso platia tie isté výsledky, ako výsledky odovodené pre pohyb sústavy hmotných bodov s obmedzením vzájomného pohybu jednotlivých hmotných bodov.

Mechanika dokonale tuhého telesa opisuje posuvno rotačný pohyb telesa.

Vychádza z mechaniky hmotného bodu a sústavy hmotných bodov, opakuje a rozvíja už známe skutočnosti. Cieľom kapitoly je nájsť kinematické veličiny opisujúce pohyb dokonale tuhého telesa, zostaviť pohybové rovnice dokonale tuhého telesa, vyjadriť zákony zachovania pre toto teleso a uviesť jednoduché aplikácie na pohyb dokonale tuhého telesa.



Obrázok 7.1: Posuvný a posuvno-otáčavý pohyb telesa.

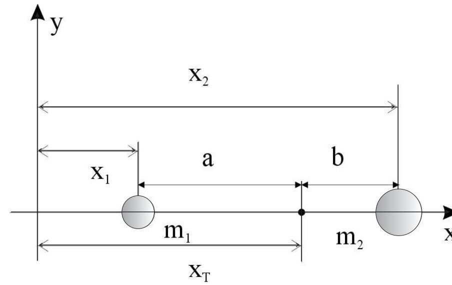
7.1 Ťažisko

Fyzici radi rozmýšľajú nad zložitými problémami a hľadajú v nich niečo jednoduché a známe. Predstavme si napríklad, že sme hodili baseballovú pálku. Pálka sa môže pohybovať viacerými spôsobmi: a) jednoduchým posuvným pohybom v určitom smere, b) otáčať sa okolo osi, c) pri posuvnom pohybe bude aj rotovať v rovine (obr. 7.1) a d) vykonáva zložitý priestorovo-rotačný pohyb. Jej pohyb je na popis teda zložitejší ako pri guľôčke, ktorá sa chová ako hmotný bod. Pálku vo všeobecnosti pri popise pohybu nemožno nahradiť hmotným bodom, lebo trajektórie jednotlivých elementov pálky sú navzájom odlišné. Pálku treba chápať už ako teleso s určitými rozmermi. Pri podrobnejšom skúmaní však zistíme, že jeden z bodov pálky má význačné postavenie. Pohybuje sa totiž po rovnakej dráhe, ako by sa pohybovala gulička pri hode. Jej pohyb je presne taký, ako keby a) v ňom bola sústredená všetka hmotnosť valca a po b) pôsobila v ňom celková tiažová sila pôsobiaca na pálku.

Tento význačný bod sa nazýva **ťažiskom** alebo **hmotným stredom telesa**. Vo všeobecnosti platí: **Ťažisko telesa alebo sústavy hmotných bodov je bod, ktorý sa pohybuje tak, ako by v ňom bola sústredená všetka hmotnosť telesa (sústavy) a pôsobili v ňom všetky vonkajšie sily pôsobiace na teleso (sústavu).**

Ťažisko pálky leží na jeho pozdĺžnej osi. Môžeme ho nájsť tak, že si pálku položíme vodorovne na vystretý prst a vyvážime ho. Ťažisko potom bude ležať na osi pálky práve nad prstom.

7.2 Ťažisko sústavy bodov



Obrázok 7.2: Poloha ťažiska dvoch hmotných bodov.

Určenie polohy ťažiska sústavy hmotných bodov patrí k jednej zo základných úloh pri popise danej sústavy. Ako už bolo povedané, zavedenie ťažiska (hmotného stredu) výrazne zjednodušuje mnohé úvahy pri popise pohybu. Začnime s najjednoduchším prípadom výpočtu ťažiska dvoch hmotných bodov. Pod pojmom ťažisko budeme rozumieť taký bod na ich spojnici (obr. 7.2), ktorý ju rozdeľuje v nepriamom pomere hmotností uvedených hmotných bodov. Platí teda

$$\frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{7.1}$$

Podľa (obr. 7.2) platí, že $a = x_T - x_1$ a $b = x_2 - x_T$. Po dosadení vyjadrení pre a, b do predošlej rovnice a jej úprave dostaneme pre $x-$ovú polohu ťažiska dvoch hmotných bodov vzťah

$$x_T = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2}\ . \tag{7.2}$$

Platnosť tohto vzťahu možno jednoduchou úvahou zovšeobecniť aj pre sústavu n hmotných bodov. Ak poloha $i-$tého hmotného bodu je x_i a jeho hmotnosť m_i, potom pre $x-$ovú polohu ťažiska danej sústavy platí vzťah

$$x_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i\ , \tag{7.3}$$

kde celková hmotnosť sústavy je $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

V skutočnosti sú však hmotné body sústavy rozmiestnené v trojrozmernom karteziánskom priestore, pričom ich polohy sú určené trojicou súradníc (x_i, y_i, z_i). Polohu ich ťažiska získame zovšeobecnením vzťahu (7.3) na trojrozmerný prípad

$$x_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i, \qquad y_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i, \qquad z_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i\,. \tag{7.4}$$

Polohu ťažiska môžeme zapísať i použitím vektorovej symboliky. Polohu $i-$tej častice možno zadať buď jej súradnicami (x_i, y_i, z_i) alebo polohovým vektorom $\vec{r}_i = x_i\,\vec{i} + y_i\,\vec{j} + z_i\,\vec{k}$. Index i označuje časticu, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sú jednotkové vektory karteziánskej sústavy súradníc. **Polohový vektor ťažiska sústavy hmotných bodov** je potom daný nasledujúcim vzťahom

$$\vec{r}_T = x_T\,\vec{i} + y_T\,\vec{j} + z_T\,\vec{k}\,. \tag{7.5}$$

Tri skalárne rovnice (7.4) potom možno nahradiť jednou vektorovou rovnicou

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i\,. \tag{7.6}$$

7.3 Tuhé teleso

Doteraz sme sa zaoberali jednotlivými hmotnými bodmi (časticami) alebo sústavou hmotných bodov. Pokiaľ sme používali názov "teleso", stotožňovali sme ho s hmotným bodom, napr. ťažiskom. Považovali sme ho za určitý hmotný objekt s troma stupňami voľnosti, ktorý sa pohybuje ako celok a jeho pohyb možno popísať zadaním troch súradníc daného bodu. Nezaoberali sme sa pohybom jednotlivých častí daného telesa a ani ich vplyvom na samotný pohyb. Reálne tuhé teleso má však určité rozmery a zaberá priestor s objemom V. Môžeme si ho predstaviť ako sústavu veľkého počtu bodov, ktoré sa z hľadiska makroskopického javia ako teleso so spojito rozloženou hmotnosťou m. Ide o spojitosť vo fyzikálnom zmysle - v každom uvažovanom objeme spojitého telesa musí byť dostatočný počet atómov na to, aby sa dalo hovoriť o jeho vlastnostiach. Pre jednoduchosť ďalších výpočtov zavádzame **dokonale tuhé teleso**, ktoré sa pôsobením síl nedeformuje, t. j. vzdialenosti medzi jeho jednotlivými časťami sa zachovávajú. Pretože v tejto kapitole sa budeme zaoberať len dokonale tuhým telesom, budeme používať skrátený názov **tuhé teleso**.

Jedna zo základných charakteristík tuhého telesa je **hustota** - ρ. V prípade, že teleso je homogénne s rovnomerne rozloženou hmotnosťou, je jeho hustota konštantná a definovaná ako

$$\rho = \frac{m}{V} \, ,$$

kde V je objem telesa a základná jednotka hustoty je $\rho\,(kg/m^3)$. Pri plošných útvaroch používame pojem plošná hustota σ (hmotnosť na jednotku plochy, (kg/m^2)) a pri lineárnych útvaroch lineárna hustota λ (hmotnosť na jednotku dĺžky, (kg/m).

V prípade, že teleso nie je homogénne, hustota nie je konštanta a je funkciou priestorových súradníc $\rho(x, y, z)$. Zvoľme v telese bod A so súradnicami $(x_A, y_A,\ z_A)$, ktorý obklopíme malým objemom $\triangle V$ s hmotnosťou $\triangle m = \rho(x, y, z)\triangle V$. Hmotnosť takéhoto telesa môžeme potom vypočítať cez integrálny vzťah:

$$m = \int_m dm = \int_V \rho(x, y, z)\, dV \, . \tag{7.7}$$

7.4 Ťažisko tuhého telesa

Vektor ťažiska sústavy hmotných bodov (častíc) definuje vzťah (7.6). V prípade, že máme definovať ťažisko tuhého telesa so spojite rozloženou hmotnosťou, postupujeme nasledujúcim spôsobom. Teleso fiktívne rozdelíme na fyzikálne konečne malé časti s objemami dV. V každej z nich sa nachádza malá časť hmotnosti dm celej hmotnosti telesa m. Na popis priestorového rozloženia hmotnosti telesa použijeme hustotu telesa $\rho(\vec{r})$ (7.7), kde $\vec{r}$ je polohový vektor bodu, ktorý určuje polohu objemu dV vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy. Keďže ide o spojite rozloženú hmotu v tuhom telese, používame namiesto konečného počtu častí telesa a konečných sumácií v čitateli a menovateli vzťahu (7.6) integrály a **polohový vektor ťažiska tuhého telesa** potom definujeme vzťahom

$$\vec{r}_T = \frac{\int_m \vec{r} dm}{\int_m dm} = \frac{\int_V \vec{r}\rho(x, y, z)\, dV}{\int_V \rho(x, y, z)\, dV} \, . \tag{7.8}$$

Pri homogénnom (rovnomernom) rozložení hmotnosti v celom objeme telesa je hustota ρ konštanta. V takomto prípade pri výpočte hustotu možno vybrať pred integrál a hmotnosť telesa môžeme vypočítať ako $m = \rho \int_V dV = \rho V$,

pričom integrál cez objem telesa je jeho objem V. V karteziánskej súradnicovej sústave pre ťažisko tuhého telesa platí

$$x_T = \frac{\rho}{m}\int_V x\,dV, \quad y_T = \frac{\rho}{m}\int_V y\,dV, \quad z_T = \frac{\rho}{m}\int_V z\,dV\ . \tag{7.9}$$

Celý rad telies má určitú geometrickú symetriu, napr. stredovú, osovú alebo rovinnú. Poloha ťažiska takého symetrického homogénneho telesa potom úzko súvisí s jeho symetriou. Ak je teleso stredovo symetrické, splýva jeho ťažisko so stredom symetrie. Ťažisko telesa s osovou (resp. rovinnou) symetriou leží na osi (resp. v rovine) symetrie. Ťažisko homogénnej gule splýva s jej geometrickým stredom. Ťažisko homogénneho kužeľa leží na jeho osi. Ťažisko banánu, ktorého rovina symetrie ho delí na dve zrkadlovo rovnaké časti, leží v tejto rovine. Ťažisko však nemusí nutne ležať v telese. Tak napríklad, v ťažisku podkovy nie je žiadny kov a v ťažisku prsteňa nie je žiadne zlato.

7.5 Rýchlosť a zrýchlenie ťažiska

Poloha ťažiska sústavy hmotných bodov je určená rovnicou (7.6), pričom platí

$$m\,\vec{r}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i\ , \tag{7.10}$$

kde m je celková hmotnosť sústavy. Derivovaním tejto rovnice podľa času dostaneme

$$m\,\frac{d\vec{r}_T}{dt} = m\,\vec{v}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i\ , \tag{7.11}$$

kde $\vec{v}_T$ je **rýchlosť ťažiska** a $\vec{v}_i$ rýchlosť i-teho hmotného bodu. Podľa rovnice (7.11) môžeme vysloviť I. vetu o pohybe ťažiska sústavy hmotných bodov: **Hybnosť ťažiska sústavy hmotných bodov sa rovná súčtu hybností jednotlivých hmotných bodov sústavy.**

Ďalším derivovaním rovnice (7.11) podľa času dostávame vzťah

$$m\,\frac{d\vec{v}_T}{dt} = m\,\vec{a}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{a}_i\ , \tag{7.12}$$

kde $\vec{a}_T$ je **zrýchlenie ťažiska** a $\vec{a}_i$ zrýchlenie i-teho hmotného bodu. Aplikáciou II. Newtonovho zákona ($F = m\,a$) získame

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i = m\,\vec{a}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{a}_i\ , \tag{7.13}$$

čo je matematická formulácia II. vety o pohybe ťažiska sústavy: **Rovnovážny stav ťažiska sústavy hmotných bodov porušia len vonkajšie sily pôsobiace na sústavu. Ťažisko sa pohybuje ako bod, v ktorom je sústredená hmotnosť všetkých hmotných bodov sústavy a na ktorý pôsobia všetky vonkajšie sily pôsobiace na sústavu HB.**

Týmto sa rozširuje platnosť dynamiky hmotného bodu aj o dynamiku sústavy hmotných bodov, resp. tuhého telesa. Všetky výsledky odvodené pre pohyb hmotného bodu možno použiť pre posuvný pohyb ťažiska sústavy hmotných bodov i tuhého telesa. Okrem tohto posuvného pohybu sústavy treba mať na zreteli aj otáčavý pohyb sústavy hmotných bodov okolo ťažiska. Výsledné sily pôsobiace na jednotlivé body sústavy hmotných bodov možno nahradiť výslednou silou F v ťažisku, ktorá zapríčiňuje posuvný pohyb sústavy ako celku, a momentom sily M, ktorý zas vyvoláva otáčanie sústavy okolo ťažiska. V ďalších kapitolách si rozoberieme práve tento pohyb vzhľadom na ťažisko a odvodíme výsledky, ktoré budeme môcť použiť najmä pri pohybe tuhého telesa.

7.6 Impulzové vety

Druhý Newtonov zákon platí len pre jeden hmotný bod. Jeho zovšeobecnenie pre sústavu hmotných bodov, resp. tuhé teleso formulujú tzv. impulzové vety.

I. impulzová veta

Podľa druhého pohybového zákona je časová zmena hybnosti hmotného bodu rovná výslednej sile naň pôsobiacej. V sústave hmotných bodov môžeme pre každý jeden písať

$$\frac{\vec{p_i}}{dt} = \vec{F_i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{i,j} \ ,$$

kde $i = 1, 2, ..., n$ a $\vec{p_i} = m_i \vec{v_i}$ je hybnosť $i-$teho bodu. Prvý člen $\vec{F_i}$ je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na $i-$ty hmotný bod, druhý člen je výslednica vnútorných síl na bod i. Sčítaním všetkých rovníc získame celkovú časovú zmenu hybnosti sústavy, pričom výslednica vnútorných síl medzi všetkými bod-

mi sústavy je rovná nule (akcia reakcia). Sumáciu potom zapíšeme ako

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\ . \tag{7.14}$$

Ak označíme $\vec{p} = \Sigma_i \vec{p}_i$ ako celkovú hybnosť sústavy hmotných bodov a výslednicu všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov ako $\vec{F} = \Sigma_i \vec{F}_i$, môžeme písať **I. impulzovú vetu** v tvare

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\ . \tag{7.15}$$

Zovšeobecnený druhý Newtonov zákon pre sústavu hmotných bodov, teda I. impulzová veta hovorí, že **časová zmena celkovej hybnosti sústavy je rovná výslednej vonkajšej sile pôsobiacej na sústavu hmotných bodov.**

Pri riešení príkladov pracujeme s pojmom izolovaná sústava, t. j. sústava, na ktorú nepôsobí vonkajšia sila, a teda platí $\vec{F} = \vec{0}\,N$. Z I. impulzovej vety pre ňu vyplývajú nasledujúce dôsledky:

- Celková hybnosť izolovanej sústavy hmotných bodov je konštantná, z čoho vyplýva **zákon zachovania celkovej hybnosti izolovanej sústavy hmotných bodov**:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \text{konšt.}\ . \tag{7.16}$$

- Celková mechanická energia izolovanej sústavy hmotných bodov je konštantná, z čoho vyplýva **zákon zachovania celkovej energie izolovanej sústavy hmotných bodov**.

- Hmotný stred izolovanej sústavy sa nachádza v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, z čoho vyplýva zákon pohybu hmotného stredu izolovanej sústavy hmotných bodov.

II. impulzová veta

Majme sústavu hmotných bodov, na ktorú pôsobí vonkajšia sila $\vec{F}$. Na jeden hmotný bod s hmotnosťou m_i a hybnosťou $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ pôsobí časť vonkajšej sily $\vec{F}_i$ a súčet vnútorných síl $\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{F}_{i,j}$. Moment týchto síl vzhľadom

na ľubovoľý vzťažný bod O je

$$M_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{i,j} \ , \tag{7.17}$$

kde vektor $\vec{r}_i$ určuje polohu $i-$teho hmotného bodu sústavy vzhľadom na vzťažný bod O. Uvažovaný $i-$ty hmotný bod vzhľadom na vzťažný bod O má moment hybnosti $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, ktorého súvis s momentom sily je daný pohybovou rovnicou $(dL/dt = M)$. Na tomto základe potom môžeme časovú zmenu momentu hybnosti hmotného bodu písať ako

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = M_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{i,j} \ , \tag{7.18}$$

čo predstavuje sústavu n rovníc pre $i = 1, 2, ..., n$. Sčítaním rovníc dostaneme časovú zmenu momentu hybnosti celej sústavy. Vzniknutý vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov $\Sigma_i(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$ predstavuje výslednicu momentov všetkých vonkajších síl $\vec{M} = \Sigma_i \vec{M}_i$ a vektorový súčet momentov hybností jednotlivých hmotných bodov $\Sigma_i \vec{L}_i$ predstavuje celkový moment hybnosti sústavy $\vec{L}$. Z predchádzajúcich úvah vieme, že dvojitá suma v rovnici predstavuje vektorový súčet momentov všetkých vnútorných síl, ktorý je nulový. Po uvedených označeniach dostaneme rovnicu

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \ , \tag{7.19}$$

ktorá sa nazýva **II. impulzová veta**. Z nej vyplýva, že **vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov je rovný časovej zmene momentu hybnosti sústavy hmotných bodov.**

Pre izolovanú sústavu je výsledný moment síl $\vec{M}$ nulový, čiže celkový moment hybnosti $\vec{L}$ je konštantný, z čoho vyplýva **zákon zachovania momentu hybnosti sústavy** $\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i =$ *konšt.*. Vo všeobecnosti môžu tiež momenty jednotlivých síl pôsobiť v smere s rovnakou i opačnou orientáciou. Môže teda dôjsť k situácii, že sa otáčavé účinky jednotlivých síl navzájom vyrušia - teleso nebude vykonávať otáčavý pohyb. Túto situáciu popisuje **momentová veta: Otáčavý účinok síl pôsobiacich na tuhé teleso sa navzájom ruší, ak je vektorový súčet momentov všetkých síl vzhľadom na určitú os rovný nule.** Na základe momentovej vety môžeme určiť polohu ťažiska telesa, veľkosť sily alebo jej polohy aby bolo teleso v pokoji a pod.

7.7 Kinetická energia tuhého telesa

7.7.1 Translačný pohyb tuhého telesa

Jedným zo základných pohybov je translačný, čiže posuvný pohyb. Pri tomto pohybe sa všetky body telesa pohybujú po rovnobežných trajektóriách a majú v danom čase rovnakú rýchlosť a zrýchlenie. Kinetická energia takto pohybujúcej sa sústavy hmotných bodov je súčet jednotlivých kinetických energií hmotných bodov. Ak však zoberieme do úvahy fakt, že rýchlosti v_i všetkých bodov sústavy pri tomto type pohybu sú rovnaké a totožné s rýchlosťou ťažiska $v_i = v_T$, môžeme ju vybrať pred sumu a sumácia cez jednotlivé hmotnosti dá hmotnosť telesa m ako v nasledujúcej rovnici

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\, v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n\, v_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_T^2 = \frac{1}{2}v_T^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2}m\, v_T^2\ . \end{aligned} \tag{7.20}$$

Tento vzťah je úplne identický so vzťahom pre kinetickú energiu hmotného bodu (4.28).

7.7.2 Rotačný pohyb tuhého telesa okolo osi

Tak ako posuvnému pohybu telesa sme priradili kinetickú energiu, tak rotujúcemu telesu zodpovedá kinetická rotačná energia. Teraz si ukážeme ako ju vypočítame. Známy vzťah $\frac{1}{2}m\, v^2$ (4.28) platí len pre kinetickú energiu jednej častice alebo tuhého telesa vykonávajúceho len posuvný pohyb. Pre výpočet kinetickej energiu rotujúceho telesa nie je priamo použiteľný. Nevieme, akú veličinu treba dosadiť za v.

Z technického hľadiska je dôležitý pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi. Skôr ako vyjadríme rovnice opisujúce tento pohyb, hľadajme základné vlastnosti týchto rovníc. Predovšetkým všetky body telesa, a teda aj ťažisko, vykonávajú pohyb po kružnici so stredom na osi otáčania (často sa ťažisko nachádza na osi, takže sa nepohybuje). Časovo závislým parametrom je teda uhol pootočenia telesa okolo osi. Rotáciu charakterizujú kinematické veličiny rotačného pohybu: uhol otočenia α, uhlová rýchlosť ω a uhlové zrýchlenie ε. Považujeme teleso (všeobecne každé rotujúce teleso) za sústavu pohybujúcich sa častíc s rôznymi rýchlosťami. Rotačnú energiu takéhoto telesa potom

môžeme vypočítať ako súčet kinetických energií jednotlivých častíc, t. j.:

$$E_r = \frac{1}{2}m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\, v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n\, v_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2\ ,$$

pričom hmotnosť každej i-tej častice sme označili ako m_i a jej rýchlosť v_i. Získaný vzťah je však pre výpočet rotačnej energie rotujúceho telesa nepraktický. Častice sa pohybujú rôznymi rýchlosťami a dokonca aj rôznymi smermi. Ak si však uvedomíme, že ide o pohyb rotujúceho telesa okolo určitej osi, môžeme daný vzťah veľmi pekne upraviť. Vyjadríme si rýchlosť každej častice pomocou uhlovej rýchlosti, pomocou ktorej môžeme charakterizovať otáčavý pohyb, ako: $v_i = \omega\, r_i$. Použitím spomenutého vzťahu môžeme predošlú rovnicu upraviť na

$$E_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\omega\, r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\right)\omega^2\ . \tag{7.21}$$

Veličina v zátvorke po poslednej úprave záleží na rozložení hmoty telesa vzhľadom na otáčanie. Pomenujeme ju **moment zotrvačnosti telesa** J vzhľadom na os otáčania a jeho jednotka je (kg/m^2). Hodnota momentu zotrvačnosti telesa závisí od umiestnenia osi otáčania a nezávisí od uhlovej rýchlosti otáčavého pohybu. Dané tvrdenie platí aj všeobecne. Pomocou definície momentu zotrvačnosti

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\ , \tag{7.22}$$

získame z rovnice (7.21) pre výpočet **rotačnej energie rotujúceho telesa** zjednodušený vzťah:

$$E_r = \frac{1}{2}J\,\omega^2\ . \tag{7.23}$$

Všimnime si podobnosť rovnice (7.23) pre rotačnú energiu otáčajúceho sa tuhého telesa so vzťahom: $\frac{1}{2}m\, v_T^2$ (7.20), ktorý vyjadruje jeho kinetickú energiu pri posuvnom pohybe. V oboch vzťahoch sa vyskytuje faktor 1/2. Hmotnosť m vo vzťahu pre kinetickú energiu posuvného pohybu predstavuje "mieru zotrvačnosti". V prípade otáčania sa vo výraze pre E_r objavuje moment zotrvačnosti J, ktorý tiež možno chápať ako "mieru zotrvačnosti" telesa pri jeho rotácii. V oboch vzťahoch vystupuje druhá mocnina príslušnej rýchlosti (rýchlosť posuvného pohybu v_T, príp. rýchlosť otáčavého pohybu ω). Obidva výrazy predstavujú rovnaký typ energie, líšia sa len spôsobom zápisu v závislosti od pohybu telesa.

Všeobecný pohyb telesa v každom okamihu možno popísať posuvným pohybom s rýchlosťou ťažiska v_T a rotáciou s uhlovou rýchlosťou ω okolo osi rotácie telesa. **Celková kinetická energia tuhého telesa** sa dá potom vyjadriť ako súčet kinetickej energie posuvného pohybu a energie rotačného pohybu vo vzťahu:

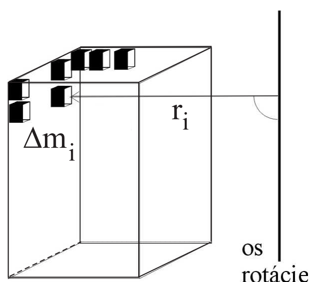
$$E_r = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J\,\omega^2 \ , \tag{7.24}$$

kde m je hmotnosť telesa a J moment zotrvačnosti telesa okolo rotačnej osi pohybu v danom okamihu.

7.8 Moment zotrvačnosti

Vzťahom (7.22) sme definovali moment zotrvačnosti tuhého telesa skladajúceho sa z konečného počtu hmotných bodov. Ak chceme nájsť moment zotrvačnosti tuhého telesa ako je valec alebo koleso, rozdelíme ho na hmotnostné elementy (obr. 7.3), ktoré možno charakterizovať fyzikálnymi veličinami: hustota ρ_i, objem ΔV_i a hmotnosť $\Delta m_i = \rho_i\,\Delta V_i$. Vzťah (7.22) potom nadobudne tvar:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \Delta V_i\, r_i^2 \ .$$



Obrázok 7.3: Rozdelenie telesa na hmotnostné elementy Δm_i pri určení jeho momentu zotrvačnosti.

Daný vzťah možno zovšeobecniť na teleso, ak sumáciu nahradíme integráciou cez objem telesa a elementárnu hmotnosť umiestnenú v objeme dV budeme popisovať pomocou hustoty telesa $\rho(r)$ ako funkciu r

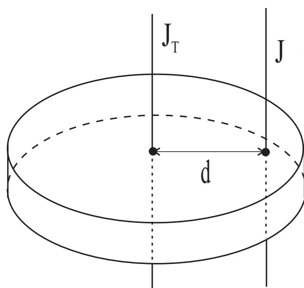
$$J = \int_V r^2\,\mathrm{d}m = \int_V \rho(r)\, r^2\,\mathrm{d}V \ , \tag{7.25}$$

kde r je kolmá vzdialenosť elementu telesa dm od osi rotácie s využitím d$m = \rho\, dV$. Výpočet momentu zotrvačnosti telesa integrálom (7.25) vzhľadom na niektorú os môže byť aj prácnou záležitosťou. V prípade, že hustota telesa je v celom objeme konštantná, a teleso má určitú priestorovú symetriu, výpočet sa dá zvládnuť pomerne jednoducho.

7.8.1 Steinerova veta

V predchádzajúcich odsekoch sme zaviedli pojem moment zotrvačnosti sústavy hmotných bodov, resp. tuhého telesa vzhľadom na istú os, ktorý možno vyrátať pomocou vzťahov (7.22), (7.25). Pri výpočte momentu zotrvačnosti vzhľadom na inú os ako máme vypočítané (obr. 7.4), je výhodné použiť **Steinerovu vetu**, ktorá hovorí: **moment zotrvačnosti J tuhého telesa vzhľadom na ľubovoľnú os sa rovná momentu zotrvačnosti J_T tohto telesa vzhľadom na os paralelnú s danou osou a prechádzajúcu ťažiskom telesa T plus súčin hmotnosti telesa a štvorca vzdialenosti d medzi týmito osami**

$$J = J_T + m\, d^2\ . \tag{7.26}$$



Obrázok 7.4: Aplikácia Steinerovej vety.

Pre niektoré jednoduché homogénne telesá sú momenty zotrvačnosti uvedené v nasledujúcej tabuľke a z definície Steinerovej vety si môžeme prepočítať ich momenty zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os.

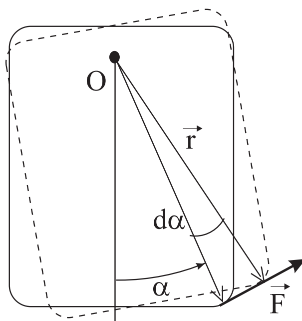
7.9 Pohybová rovnica telesa pri otáčaní okolo osi

Teleso otáčajúce sa okolo pevnej osi uhlovou rýchlosťou ω má rotačnú energiu $E_r = 1/2\, J\, \omega^2$ (7.23). Ak na teleso nepôsobia vonkajšie sily, bude E_r

Tabuľka 7.1: Momenty zotrvačnosti jednoduchých homogénnych telies.

Valec s hmotnosťou m s polomerom r vzhľadom na geometrickú os	$J = \frac{1}{2}\, m\, r^2$
Valec s hmotnosťou m s polomerom r vzhľadom na obvodovú priamku	$J = \frac{3}{2}\, m\, r^2$
Tyč s hmotnosťou m a dĺžky l zanedbateľného prierezu vzhľadom na os kolmú na tyč: prechádzajúcu koncovým bodom tyče	$J = \frac{1}{3}\, m\, l^2$
Tyč s hmotnosťou m a dĺžky l zanedbateľného prierezu vzhľadom na os kolmú na tyč: prechádzajúcu stredom tyče	$J = \frac{1}{12}\, m\, l^2$
Guľa s hmotnosťou m a polomerom r vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom	$J = \frac{2}{5}\, m\, r^2$

konštantná a otáčanie bude rovnomerné so stálou uhlovou rýchlosťou. Aby nastala zmena uhlovej rýchlosti, a tým aj rotačnej energie, je treba pôsobenie vonkajších síl. Ich práca sa podobne ako v prípade posuvného pohybu bude rovnať zmene rotačnej energie. Z tejto podmienky môžeme odvodiť pohybovú rovnicu telesa konajúceho otáčavý pohyb okolo pevnej osi.



Obrázok 7.5: Pôsobenie vonkajšej sily F spôsobujúcej zmenu rotačnej energie

Ako sme už povedali v predošlých odsekoch, všetky vonkajšie sily pôsobiace na teleso môžeme nahradiť pomocou superpozície síl jednou silou F, ktorej pôsobisko bude vzdialené vo vzdialenosti r od osi otáčania (obr. 7.5). Výsledný

moment vonkajších síl (4.7) môžeme napísať potom ako

$$M = r\,F\,. \tag{7.27}$$

Pri posunutí pôsobiska sily F o dl, sila vykoná elementárnu prácu

$$\mathrm{d}\,W = F\,\mathrm{d}l = F\,r\,d\alpha = M\,\mathrm{d}\alpha\,, \tag{7.28}$$

kde posunutie $\mathrm{d}l$ predstavuje časť dráhy po kružnici s polomerom r: $r\,\mathrm{d}\alpha$. Touto elementárnou prácou sa zmení rotačná energia E_r telesa o $\mathrm{d}E_r$. Pohybová energia telesa pri nehybnej polohe osi otáčania závisí len od uhlovej rýchlosti. Teda jej zmena energie sa dá vyjadriť ako: $\mathrm{d}E_r = J\,\omega\,\mathrm{d}\omega$ a tá sa musí rovnať vykonanej práci $\mathrm{d}W$, čím dostaneme vyjadrenie:

$$J\,\omega\,\mathrm{d}\omega = M\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Ak delíme túto rovnicu časom dt, v ktorom nastáva elementárne pootočenie telesa, dostaneme

$$J\,\omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{dt} = M\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7.29}$$

Podiel $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ je rovný okamžitej uhlovej rýchlosti a podiel $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ je zase rovný uhlovému zrýchleniu ε, takže dostávame

$$M = J\,\varepsilon\,. \tag{7.30}$$

To je pohybová rovnica telesa konajúceho otáčavý pohyb okolo pevnej osi. Hovorí, že súčin momentu zotrvačnosti telesa k osi rotácie a uhlového zrýchlenia je rovný momentu všetkých vonkajších síl vzhľadom na pevnú os rotácie. Pozorujeme analógiu s pohybovou rovnicou pre posuvný pohyb $F = m\,a$. Hmotnosť telesa zastupuje moment zotrvačnosti, ktorý prihliada k rozloženiu hmotnosti okolo osi rotácie, zrýchlenie je tu vyjadrené uhlovým zrýchlením a momentom sily, lebo ide o otáčavý pohyb. Rovnica (7.30) platí len pre rotáciu okolo pevnej osi.

Pri rotácii okolo pevnej osi má vektor uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ v priestore stály smer a z pôsobiaceho momentu sa uplatňuje zložka $\vec{M}$, ktorá má tú istú orientáciu ako os rotácie. Pretože moment zotrvačnosti J vzhľadom na pevnú os v telese je konštanta, môžeme **pohybovú rovnicu** (7.30) písať aj vo vektorovom tvare

$$\vec{M} = J\,\vec{\varepsilon} = J\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\,\vec{\omega})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{dt}\,. \tag{7.31}$$

Táto rovnica nie je nič iné ako II. impulzová veta (7.19) aplikovaná na rotáciu telesa okolo pevnej osi. Príslušný moment hybnosti v danom prípade je určený súčinom

$$\vec{L} = J\,\vec{\omega} \tag{7.32}$$

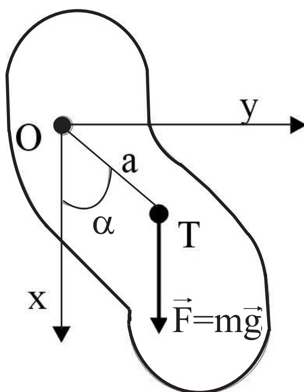
a $\vec{L}$ je vektor, ktorý leží v osi rotácie.

7.9.1 Fyzikálne kyvadlo

Tuhé teleso, ktoré môže kmitať okolo pevnej vodorovnej osi neprechádzajúcej jeho hmotným stredom (ťažiskom) sa volá fyzikálne kyvadlo (obr. 7.6). Vzdialenosť ťažiska T od osi rotácie O nech je a a moment tiažovej sily vzhľadom na os O je $M = -m\,g\,a\,\sin\,\alpha$. Moment tiažovej sily pôsobí proti výchylke a snaží sa priviesť kyvadlo späť do rovnovážnej polohy (preto ho píšeme so záporným znamienkom). Pohyb kyvadla sa dá popísať pohybovou rovnicou (7.30), ktorá má pre tento prípad tvar

$$M = J\,\varepsilon = J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} = -m\,g\,a\,\sin\,\alpha\;, \tag{7.33}$$

kde J je moment zotrvačnosti k osi O.



Obrázok 7.6: Pôsobenie tiažovej sily vo fyzikálnom kyvadle pri vychýlení o uhol α okolo osi neprechádzajúcej ťažiskom.

Po úprave predošlej rovnice dostaneme

$$J\,\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} + m\,g\,a\,\sin\,\alpha = 0\;, \tag{7.34}$$

čo je diferenciálna rovnica druhého rádu s veľmi komplikovaným riešením, ktoré možno napísať len v tvare nekonečného radu. Riešenie rovnice (7.34) sa

však veľmi zjednoduší, ak vezmeme do úvahy iba malé kmity kyvadla, t. j. pre malé uhly α, keď možno nahradiť sin $\alpha \doteq \alpha$. Rovnicu môžeme potom písať ako

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} + \omega^2\,\alpha = 0, \qquad \text{kde} \qquad \omega^2 = \frac{m\,g\,a}{J} \tag{7.35}$$

a jej riešenie má jednoduchý tvar (presvedčíte sa dosadením)

$$\alpha = \alpha_m\,\sin(\omega\,t + \varphi_0)\;, \tag{7.36}$$

kde α_m je amplitúda uhlovej výchylky a φ_0 je tzv. fázová konštanta, obe hodnoty sú určené počiatočnými podmienkami. Veličina ω určuje kruhovú frekvenciu kmitov a **perióda kmitov kyvadla** (doba kmitu) T teda je

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,a}}\;. \tag{7.37}$$

7.9.2 Matematické kyvadlo

Je to fiktívne kyvadlo, pričom jeho hmotnosť je sústredená v hmotnom bode zavesenom na nehmotnom závese dĺžky l. Takýto hmotný bod s hmotnosťou m pri svojom kmitavom pohybe má moment zotrvačnosti $J = m\,l^2$ (predpokladáme, že os otáčania je v mieste uchytenia). Pre periódu kmitov matematického kyvadla môžeme podľa (7.37) rovno napísať

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m\,l^2}{m\,g\,l}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\;. \tag{7.38}$$

Vidíme, že perióda kmitov matematického kyvadla nezávisí od hmotnosti hmotného bodu, ale len od dĺžky závesu. Redukovanou dĺžkou fyzikálneho kyvadla l_{red} rozumieme takú dĺžku závesu matematického kyvadla, ktoré by sa kývalo s rovnakou periódou ako fyzikálne kyvadlo. Porovnaním (7.37) a (7.38) zistíme že: $l_{red} = J/m\,l$.

7.9.3 Torzné kyvadlo

Pohyb torzného kyvadla spôsobujú pružné sily, ktoré vznikajú pri skrúcaní vlákna alebo tyče. Torzné kyvadlo môže byť realizované pomocou dosky upevnenej v jej strede na zvislom vlákne (obr. 7.7). Z experimentov vyplýva, že

súvis medzi momentom síl $\vec{M}$, ktoré spôsobujú otáčavý pohyb okolo pevnej osi a uhlom pootočenia α z rovnovážnej polohy je daný vzťahom

$$M = -M_0\,\alpha\ , \tag{7.39}$$

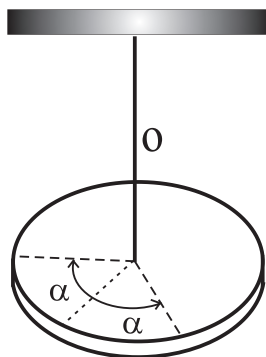
M_0 je torzná tuhosť vlákna, ktorá je určená jeho elastickými vlastnosťami a geometrickými rozmermi. Pre moment sily súčasne platí pohybová rovnica

$$M = J\,\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2}\ . \tag{7.40}$$

Porovnaním s rovnicou (7.39) a jednoduchou úpravou dostaneme pohybovú rovnicu torzného kyvadla

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} + \omega^2\,\alpha = 0, \qquad \text{kde} \qquad \omega^2 = \frac{m\,g\,a}{J}\ , \tag{7.41}$$

v ktorej $\omega^2 = M_0/J$.



Obrázok 7.7: Znázornenie pohybu torzného kyvadla okolo zvislej osi o. Kyvadlový pohyb sa uskutočňuje vo vodorovnej rovine.

Riešenie pohybovej rovnice môže byť vyjadrené pomocou závislosti

$$\alpha = \alpha_m\,\sin(\omega\,t + \varphi_0)\ , \tag{7.42}$$

v ktorej α_m je amplitúda uhlovej výchylky z rovnovážnej polohy. Hodnota fázovej konštanty φ_0 závisí od voľby začiatku merania času. Z rovnice (7.42) vyplýva, že torzné kyvadlo vykonáva periodický pohyb s periódou pohybu

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{J}{M_0}}\ . \tag{7.43}$$

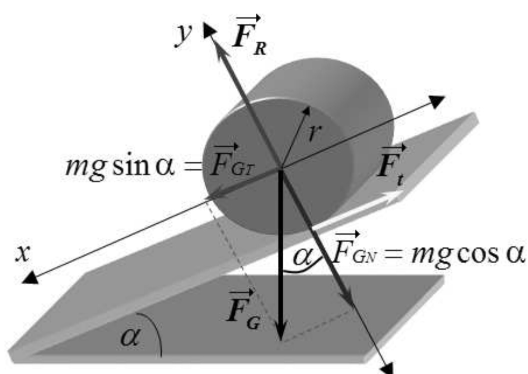
Výpočtom je možné ukázať, že torzná tuhosť pre vlákno kruhového prierezu polomeru r a dĺžky l má hodnotu

$$M_0 = \frac{\pi\, G\, r^4}{2\, l}\ , \tag{7.44}$$

kde G je modul pružnosti v šmyku materiálu, z ktorého je vlákno zhotovené. Modul pružnosti v šmyku G môže byť určený meraním periódy torzného kyvadla. Pre jeho výpočet môžeme použiť vzťah, ktorý dostaneme elimináciou torznej tuhosti M_0 z predchádzajúcich dvoch rovníc.

7.10 Pohyb valca po naklonenej rovine

Na príklade homogénneho telesa kruhového prierezu (valec, guľa) ktoré sa valí vplyvom svojej tiaže dole po naklonenej rovine si ukážeme výpočet zrýchlenia ťažiska telesa a_T a jeho rýchlosti v_T, ktorou sa pohybuje teleso po prejdení dráhy s, keď v čase $t = 0\,s$ bolo v pokoji. Teleso má polomer r a hmotnosť m, a naklonená rovina zviera uhol α s vodorovnou rovinou.



Obrázok 7.8: Teleso valiace sa po naklonenej rovine a sily, ktoré na neho pôsobia.

Na obrázku 7.8 sú znázornené sily, ktoré pôsobia na teleso: tiažová sila $\vec{F}_G$, reakcia podložky $\vec{F}_R$, ktorej pôsobisko sme posunuli pozdĺž jej vektorovej priamky do stredu telesa a trecia sila $\vec{F}_t$ pôsobiaca v mieste dotyku podložky a telesa. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že hmotnosť telesa je rozložená symetricky vzhľadom na os rotácie, a teda ťažisko splýva s geometrickým stredom telesa. Keďže sa teleso dotýka podložky nepatrnou plôškou, môžeme valivé trenie zanedbať. Keďže uvažujeme o pohybe okolo osi

prechádzajúcej stredom telesa, budú momenty tiažovej sily $\vec{F}_G$ a reakcie podložky $\vec{F}_R$ rovné nule, a teda neprispievajú k urýchľovaniu otáčavého pohybu. Roztáčanie telesa proti smeru hodinových ručičiek spôsobuje výhradne trecia sila $\vec{F}_t$, ktorej rameno sily je r.

Súradnicovú sústavu sme si zvolili tak, že os x je rovnobežná s naklonenou rovinou a os y je kolmá na naklonenú rovinu. Podľa vety o pohybe ťažiska je zrýchlenie ťažiska dané pohybovou rovnicou (7.11)

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_T \ , \tag{7.45}$$

ktorú si môžeme rozpísať zvlášť pre x-ovú a y-ovú zložku

$$m\,a_{Tx} = m\frac{\mathrm{d}^2 x_T}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_x = F_{GT} - F_t \ , \tag{7.46}$$

$$m\,a_{Ty} = m\frac{\mathrm{d}^2 y_T}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_y = F_{GN} - F_R, \tag{7.47}$$

kde x_T a y_T predstavujú súradnice ťažiska telesa. Keďže pohyb telesa sa bude uskutočňovať len v smere osi x a nie v smere kolmom na podložku (y-ová os), kde je ťažisko v pokoji, môžeme rovnicu (7.47) položiť rovnú nule

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_T}{dt^2} = 0 \quad \text{takže} \quad F_{GN} - F_R = 0 \ , \tag{7.48}$$

čiže

$$F_{GN} = m\,g\,\cos\,\alpha = F_R \ . \tag{7.49}$$

Dostali sme, že tlaková sila podložky F_R pôsobiaca na teleso je rovnako veľká ako normálová zložka tiažovej sily F_{GN}. Keďže sily ležia na jednej priamke, navzájom sa rušia. Vzhľadom na to, že v prvej pohybovej rovnici sú dve neznáme (a_{Tx} a F_t), je potrebná ešte jedna pohybová rovnica, ktorá súvisí s otáčavým pohybom telesa a momentom trecej sily vzhľadom na os otáčania, ktorá prechádza stredom či už valca alebo gule

$$I\,\varepsilon = \sum M = I_T\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = F_t\,r \ . \tag{7.50}$$

Ak sa bude teleso valiť po naklonenej rovine bez šmýkania, bude pre rýchlosť ťažiska v každom okamihu platiť

$$v_T = \frac{\mathrm{d}x_T}{dt} = \omega\,r \ . \tag{7.51}$$

Pre zrýchlenie ťažiska potom dostávame

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v_T}{dt} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \ . \tag{7.52}$$

Dosadením tohto výrazu do prvej pohybovej rovnice dostaneme

$$m\,r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = m\,g\,\sin\,\alpha - F_t \ . \tag{7.53}$$

Vyjadrením trecej sily F_t z tretej pohybovej rovnice (7.50) a dosadením do predchádzajúcej dostaneme

$$m\,r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = m\,g\,\sin\,\alpha - \frac{I_T}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \ , \tag{7.54}$$

$$m\,r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\left(\frac{I_T}{m\,r^2} + 1\right) = m\,g\,\sin\,\alpha \tag{7.55}$$

a odtiaľ využitím rovnice (7.52) pre hľadané zrýchlenie dostávame

$$a_T = \frac{g\sin\,\alpha}{\frac{I_T}{mr^2} + 1} \ . \tag{7.56}$$

Vzhľadom na to, že zrýchlenie telesa je konštantné a teleso sa začína rozbiehať z pokoja, bude vykonávať rovnomerne zrýchlený pohyb pre dráhu ktorého platí

$$s = \frac{1}{2}\,a_T\,t^2 \ . \tag{7.57}$$

Odtiaľ pre čas, za ktorý prejde dráhu s môžeme písať

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_T}} \ . \tag{7.58}$$

Pre hľadanú rýchlosť ťažiska telesa v_T pohybujúceho sa z pokoja rovnomerne zrýchleným pohybom po prejdení dráhy s potom platí

$$v_T = a_T\,t \ , \tag{7.59}$$

$$v_T = a_T\sqrt{\frac{2s}{a_T}} = \sqrt{2\,s\,a_T} \ , \tag{7.60}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2\,s\,g\sin\,\alpha}{\frac{I_T}{m\,r^2} + 1}} \ . \tag{7.61}$$

Ak teraz budeme uvažovať, že po naklonenej rovine sa valí valec ($I_{Tv} = 1/2\, m\, r^2$, v prípade gule by to bolo $I_{Tg} = 2/5\, m\, r^2$), pre hľadané zrýchlenie ťažiska valca a_{Tv} a rýchlosť v_{Tv} dostávame

$$a_{Tv} = \frac{g \sin\,\alpha}{\frac{\frac{1}{2} m r^2}{m\, r^2} + 1} = \frac{2}{3} g\, \sin\,\alpha\;, \tag{7.62}$$

$$v_{Tv} = \sqrt{\frac{2\, s\, g\, \sin\,\alpha}{\frac{\frac{1}{2} m\, r^2}{m\, r^2} + 1}} = \sqrt{\frac{4}{3} s\, g\, \sin\,\alpha}\;. \tag{7.63}$$

Z predchádzajúcich vzťahov je možné vyjadriť veľkosť trecej sily F_t

$$F_t = \frac{I_T\, a_T}{r^2} = \frac{I_T}{r^2} \frac{g\, \sin\,\alpha}{\frac{I_T}{m\, r^2} + 1} = \frac{m\, g\, \sin\,\alpha}{1 + \frac{m\, r^2}{I_T}}\;. \tag{7.64}$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že veľkosť trecej sily F_t je menšia ako priemet tiažovej sily do smeru naklonenej roviny F_{GT}, ktorej veľkosť je $m\, g\, \sin\,\alpha$. Preto sa teleso bude valiť dole naklonenou rovinou zrýchleným pohybom. Valivý pohyb však nastane iba v tom prípade, ak trecia sila bude menšia ako maximálna statická trecia sila, čiže

$$F_t \;<\; \mu_s\, F_n = \mu_s\, m\, g\, \cos\alpha\;. \tag{7.65}$$

Pre veľký uhol sklonu naklonenej roviny môže teda dôjsť k čiastočnému skĺzavaniu telesa.

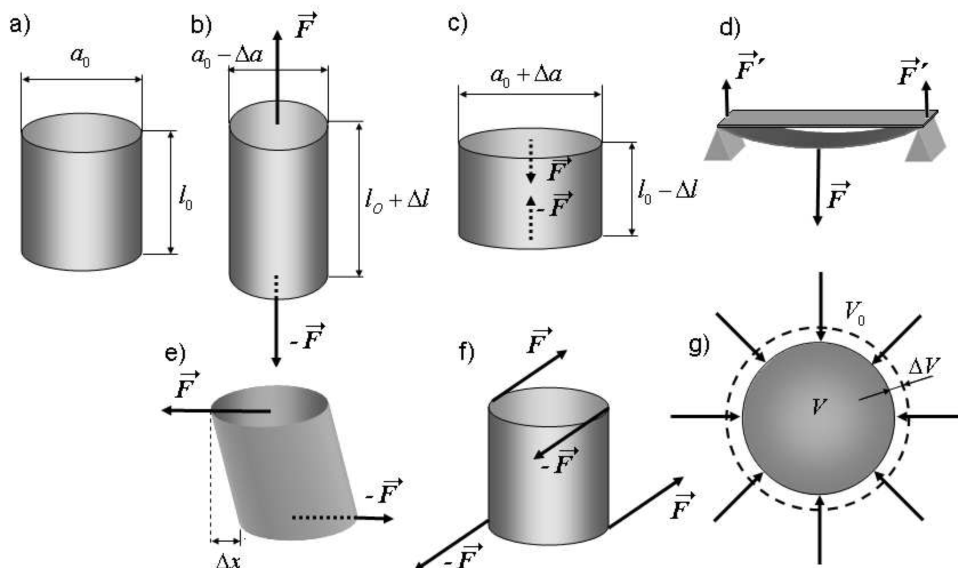
8 Mechanické vlastnosti tuhých látok

Pod mechanickými vlastnosťami tuhých látok rozumieme také vlastnosti, ktoré súvisia so zmenou tvaru telesa, jeho objemu účinkom vonkajších síl. Tieto zmeny nazývame **deformáciou**. Keď pevné teleso nadobudne pôvodný tvar po pôsobení vonkajších síl, hovoríme o **pružnej (elastickej) deformácii** (napr. napríklad skrátenie pružiny v pere), kedy je deformácia dočasná. Pri **tvárnej (plastickej) deformácii** nastane trvalá zmena telesa (napr. pri valcovaní alebo kovaní kovového predmetu).

Z mikroskopického hľadiska je deformácia tuhého telesa výsledkom zmien vo vzájomnom rozložení častíc tvoriacich teleso účinkom vonkajších síl.

Poznáme päť jednoduchých deformácií (obr. 8.1): **ťahom**, **tlakom**, **ohybom**, **šmykom** a **krútením**. Deformácia **ťahom** vznikne, keď na teleso budú pôsobiť dve rovnako veľké opačne orientované sily smerom von z telesa (obr. 8.1(b)) (napr. závesné lano výťahu). Ak sily budú smerovať dovnútra telesa, hovoríme o deformácii **tlakom** (obr. 8.1(c)) (napr. deformácia pilierov a podpier). Deformácia **ohybom** nastane napr. na nosníku podopretom na oboch koncoch, ak naň pôsobí sila kolmá na jeho pozdĺžnu os súmernosti (obr. 8.1(d)). Dolné vrstvy nosníka budú deformované ťahom, horné tlakom. Pri deformácii **šmykom** budú sily pôsobiť na hornú a dolnú podstavu a v rovinách podstáv (obr. 8.1(e)). Sily spôsobia posunutie jednotlivých vrstiev - šmyk, pričom sa ich vzdialenosť nezmení (napr. deformácia nitu alebo skrutky). Keď na koncoch tyče budú pôsobiť dve silové dvojice, pričom ich momenty budú rovnako veľké ale opačného smeru, vznikne deformácia **krútením** (obr. 8.1(f)) (napr. deformácia vrtákov). V technickej praxi sa však častejšie vyskytujú deformácie zložené z niekoľkých jednoduchých deformácií. Kryštalické materiály, špeciálne monokryštály sú vzhľadom na deformáciu tlakom alebo ťahom zväčša

anizotropné, polykryštalické materiály s náhodnou distribúciou monokryštálov prejavujú izotropné vlastnosti. Teleso vystavené tlaku zo všetkých strán bude deformované **všestranným tlakom** (obr. 8.1(g)).



Obrázok 8.1: Deformácia telesa. a) nedeformovaný valec, b) deformácia valca ťahom, c) tlakom, d) deformácia kovovej dosky ohybom, e) deformácia valca šmykom, f) krútením, g) deformácia všestranným tlakom.

8.1 Hookov zákon a krivka deformácie

Pri pružne deformovanom pevnom telese budú na plochu ľubovoľného priečneho rezu pôsobiť z oboch strán sily pružnosti. V telese pri deformácii vznikne stav napätosti, ktorý charakterizujeme pomocou veličiny **normálové napätie** σ_n definované vzťahom

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} \ , \tag{8.1}$$

kde F_n je veľkosť sily pružnosti pôsobiacej kolmo na plochu prierezu s obsahom S. Jednotkou normálového napätia je pascal[1] (Pa). Deformujúce sily spôsobia zmenu rozmerov deformovaného telesa. Ak napríklad pri deformácii ťahom

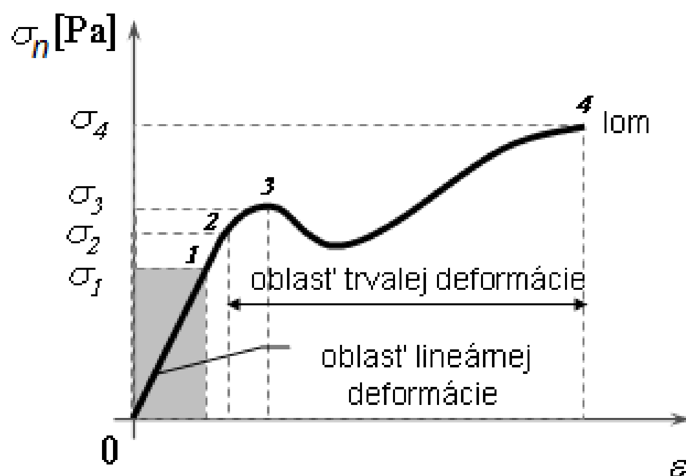
[1]BLAISE PASCAL (1623 – 1662) francúzsky matematik a fyzik. Venoval sa atmosférickému tlaku, jeho meraniu i zmene s nadmorskou výškou, čo vedel teoreticky vysvetliť. Objavil princíp tlakomeru.

sa tyč pôvodnej dĺžky l_0 predĺži na dĺžku l, zmenu dĺžky tyče charakterizuje veličina

$$\Delta l = l - l_0 \ , \tag{8.2}$$

ktorú nazývame **predĺženie**. V praxi sa častejšie používa **pomerné (relatívne) predĺženie** ε definované vzťahom

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \ . \tag{8.3}$$



Obrázok 8.2: Krivka deformácie tyče z ocele. Časť grafu ležiaca v sivom obdĺžniku predstavuje oblasť lineárnej deformácie – platnosti Hookovho zákona. Medzou pružnosti σ_2 končí oblasť pružných deformácií a začína oblasť plastických deformácií, ktorá končí medzu pevnosti σ_4, kedy dochádza k porušeniu celistvosti materiálu.

Za pomoci trhacieho stroja a skúšobnej tyče sa v praxi experimentálne sleduje závislosť normálového napätia od pomerného predĺženia, pričom zaznamenaný graf funkcie $\sigma_n = f(\varepsilon)$ sa nazýva **krivka deformácie**. Na obrázku 8.2 je znázornená krivka deformácie skúšobnej tyče z mäkkej ocele. Na začiatku (oblasť **pružnej (elastickej) deformácie** - 1) je normálové napätie priamoúmerné deformácii (pomernému predĺženiu). Tento poznatok objavil v roku 1676 anglický fyzik R. Hooke[2], preto sa nazýva **Hookov zákon**.

[2]ROBERT HOOKE (1635 – 1703) britský všestranný fyzik, astronóm, rozumel sa chémii a venoval sa i architektúre. V roku 1662 prijal miesto plateného experimentátora v Royal Society, kde na ich zasadaniach predvádzal rôzne pokusy. Od roku 1665 pôsobil ako profesor geometrie na londýnskej Greshaw College.

V oblasti lineárnej deformácie je deformácia pružných telies priamoúmerná pôsobiacim silám

$$\sigma_n = E\,\varepsilon\ , \tag{8.4}$$

kde konštanta úmernosti E je **modul pružnosti** (tiež nazývaný **Youngov**[3] **modul**), ktorého rozmer je rovnaký, ako rozmer normálového napätia a udáva sa v N/m^2 (prípadne v Pa) (napr. pre oceľ $E = 220 \times 10^9\ Pa$). Bod 1 na krivke deformácie sa nazýva **medzou úmernosti** σ_1. Hookov zákon teda platí len pre normálové napätia, kedy $\sigma_n \leq \sigma_1$. Časť krivky, $1-2$ zodpovedá **dopružovaniu**. Keď na deformované teleso prestanú pôsobiť vonkajšie sily, deformácia nezanikne hneď, ale až po istom čase. Napr. ak zaťažíme na istý čas gumenú hadicu a následne odstránime záťaž, hadica sa vráti do polohy, kedy jej dĺžka bude o niečo väčšia, ako bola jej pôvodná dĺžka a až po istom čase deformácia zmizne. Dopružovanie však nastane iba v telesách, v ktorých nebolo vyvolané väčšie normálové napätie ako **medza pružnosti** σ_2 (bod 2). Pre niektoré látky je medza úmernosti a pružnosti rovnako veľká. V technickej praxi sa pod medzou pružnosti rozumie také napätie, pri ktorom zostáva trvalé predĺženie menšie ako $0,01$ až $0,003\,\%$ pôvodnej dĺžky. V tomto rozsahu je väčšina technicky dôležitých materiálov pružná, zvlášť oceľ. Medza pružnosti ohraničuje oblasť **pružných deformácií**. Pri vyšších napätiach nezmizne deformácia po odstránení deformačného napätia úplne, čo sa prejaví ako zvyšková deformácia. Teleso sa teda bude **deformovať nepružne (plasticky)** a dôjde k trvalej deformácii telesa. Oblasť **plastickej deformácie** predstavuje časť $2-3$ krivky deformácie. Napätie σ_3, pri ktorom nastáva náhle predĺženie materiálu, sa volá **medza klzu (medza prieťažnosti)**. Počiatočný úsek 3-4 zodpovedá **tečeniu materiálu**, kedy pri malej zmene normálového napätia dochádza k veľkej zmene relatívneho predĺženia, prípadne k nárastu deformácie dochádza aj bez zmeny napätia. Na konci tohto úseku dochádza k značnej zmene fyzikálnych vlastností deformovaného telesa a k **spevneniu materiálu**, ktoré končí dosiahnutím **medze pevnosti** σ_4. Prekročením medze pevnosti sa súdržnosť materiálu poruší, pričom sa tyč pretrhne (pre oceľ je medza pevnosti $350-800\,MPa$).

[3] THOMAS YOUNG ($1773-1829$) bol anglický matematik a fyzik. Zaoberal sa rôznymi oblasťami prírodných vied: svetlom a jeho šírením, tuhým telesom, energiou, filozofiou, jazykmi (13), medicínou i harmóniou v hudbe, a dokonca aj egyptskými hieroglyfmi.

Znalosť medze pružnosti a pevnosti má dôležitý význam pri výbere materiálov pre stavby a konštrukcie. Látka je **pružná**, keď pri veľkom relatívnom predĺžení je vyvolané normálové napätie menšie, ako je medza pružnosti (napr. oceľ je pružná do relatívneho predĺženia $\varepsilon = 1\%$). Ak sa bude medza pružnosti približovať medzi pevnosti, potom materiál patrí medzi **krehké** látky (napr. sklo, porcelán, mramor, liatina, ktorá sa pretrhne pri $\varepsilon = 0,45\,\%$).

Pri pôsobení ťahom na tyč dochádza popri jej predĺženiu v smere pôsobiacej sily súčasne aj k zmenšeniu jej priečneho rezu. Pre **pomerné (relatívne) priečne skrátenie**

$$\eta = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a_0 - a}{a_0}\ , \tag{8.5}$$

kde a_0 je jej priečny rozmer pred deformáciou a a je po deformácii (obr. 8.1(b)), platí

$$\eta = \frac{1}{m}\,\varepsilon = \frac{\sigma_n}{m\,E}\ , \tag{8.6}$$

kde m je **Poissonova konštanta** a jej prevrátená hodnota sa nazýva **Poissonovo číslo (pomer)**

$$\mu = \frac{1}{m} = \frac{\eta}{\varepsilon}\ , \tag{8.7}$$

ktoré charakterizuje pomer priečneho skrátenia k pozdĺžnemu predĺženiu. Tyč kruhového prierezu s rozmerom a_0 a pôvodnou dĺžkou l_0 deformovaná ťahom nadobudne nové rozmery a a l, pre ktoré zo vzťahov (8.2), (8.3) a (8.5) platí

$$l = l_0\,(1 + \varepsilon) = l_0 \left(1 + \frac{\sigma_n}{E}\right)\ , \tag{8.8}$$

$$a = a_0\,(1 - \eta) = a_0\,(1 - \mu\,\varepsilon) = a_0 \left(1 - \mu\frac{\sigma_n}{E}\right) = a_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{m\,E}\right)\ . \tag{8.9}$$

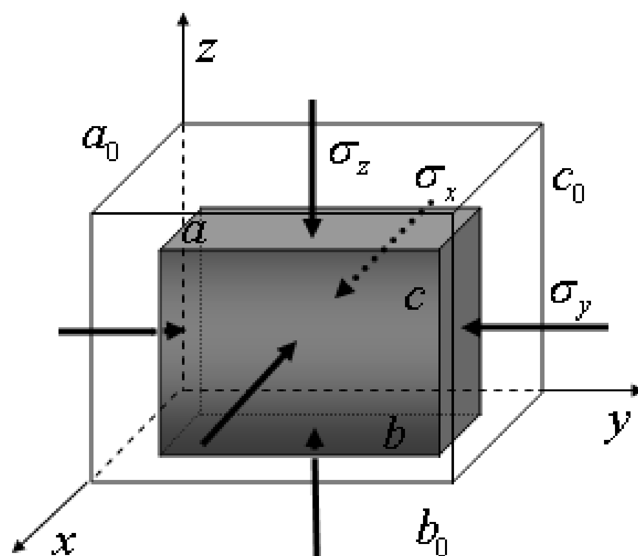
Predchádzajúce vzťahy, ktoré boli popísané pri namáhaní tyče ťahom platia aj pre namáhanie tlakom (predpokladáme ale tyč dostatočne krátku), pričom veličiny σ_n, ε a η majú záporné číselné hodnoty, čiže tyč sa tlakom v smere dĺžky skracuje a v priečnom smere predlžuje.

Podľa pôsobenia vonkajšej sily možno deformácie rozdeliť do dvoch základných skupín. Pôsobiacu silu možno rozdeliť na zložku, ktorá pôsobí kolmo na povrch a na zložku rovnobežnú s povrchom telesa. Kolmá zložka spôsobuje deformáciu telesa, ktorá sa prejavuje rozšírením alebo stlačením telesa (deformácia normálovým napätím). Druhá zložka sily, ktorá pôsobí rovnobežne s povrchom telesa spôsobuje posunutie (deformácia šmykovým napätím). Prípad deformácie šmykovým napätím je predmetom kapitoly 8.3.

8.2 Deformácia všestranným kolmým tlakom

Ak by sme kváder s počiatočnými rozmermi a_0, b_0, c_0 (obr. 8.3) ponorili do kvapaliny, v ktorej by bol v danom mieste tlak p, teleso by bolo vystavené tlaku zo všetkých strán, t. j. **všestrannému tlaku**. Objem izotropného telesa sa pri takomto tlaku zmenší, tvar však ostane rovnaký. Ak by pôsobil tlak len v jednom smere, napr. v smere hrany c_0, potom by sa hranol v tomto smere skrátil a v smere kolmom naopak predĺžil, takže by platili vzťahy

$$a = a_0(1 + \eta), b = b_0(1 + \eta), c = c_0(1 - \varepsilon) \ . \qquad (8.10)$$



Obrázok 8.3: Deformácia všestranným tlakom.

Ak bude tlak pôsobiť taktiež v smere b_0, bude v tomto smere pomerné pozdĺžne skrátenie ε, ale zároveň aj pomerné priečne predĺženie v smere hrán a_0 a c_0, takže z tejto úvahy pre rozmery kvádra vyplýva

$$a = a_0 \left(1 + 2\,\eta\right), b = b_0 \left(1 - \varepsilon + \eta\right), c = c_0 \left(1 - \varepsilon + \eta\right) \ . \qquad (8.11)$$

Nakoniec ak zarátame aj tlak pôsobiaci v smere a_0, bude aj v tomto smere pomerné pozdĺžne skrátenie ε a v priečnych smeroch pomerné priečne predĺženie η, takže konečná dĺžka hrán kvádra po deformácii bude

$$a = a_0 \left(1 - \varepsilon + 2\,\eta\right), b = b_0 \left(1 - \varepsilon + 2\,\eta\right), c = c_0 \left(1 - \varepsilon + 2\,\eta\right) \ . \qquad (8.12)$$

Tento spôsob kombinovanej deformácie založený na princípe superpozície tvrdí, že efekt kombinovaného zaťaženia na určitú štruktúru možno určiť ako súčet jednotlivých deformácií. Tento princíp možno použiť, ak zmeny závislé od napätia sú lineárne a deformácie vplyvom napätí sú malé a neovplyvňujú pôsobenia ostatných napätí. Vzhľadom na splnenie týchto predpokladov a predpokladu rovnakého tlaku zo všetkých strán môžeme pre objem deformovaného hranola písať

$$V = a_0\, b_0\, c_0\, (1 - \varepsilon + 2\,\eta)^3 \cong V_0 \left[1 - 3\,(\varepsilon - 2\,\eta)\right] \ , \qquad (8.13)$$

pričom sme zanedbali všetky členy druhého a vyššieho rádu, pretože pomerné deformácie ε a η malé.

Pre **pomernú zmenu objemu (objemové pretvorenie)** υ telesa podrobeného všestrannému tlaku platí

$$\upsilon = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = -3\,(\varepsilon - 2\,\eta) = -3\left(\frac{\sigma_n}{E} - 2\frac{\sigma_n}{m\,E}\right) = -\frac{3\,(m-2)}{m\,E}\sigma_n \ , \qquad (8.14)$$

Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva v zhode s Hookovým zákonom, že deformácia (v tomto prípade pomerná zmena objemu) je úmerná napätiu σ_n. V kvapalinách je zvykom napätie σ_n nazývať tlakom p. Podiel relatívneho úbytku objemu a tlaku, ktorý príslušné zmenšenie objemu spôsobuje sa nazýva **objemová stlačiteľnosť** χ

$$\chi = -\frac{1}{V_0}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} \ . \qquad (8.15)$$

Prevrátená hodnota objemovej stlačiteľnosti sa nazýva **modul objemovej pružnosti** K

$$K = \frac{1}{\chi} = -\frac{p}{\upsilon} = \frac{mE}{3\,(m-2)} = \frac{E}{3\,(1-2\mu)} \ . \qquad (8.16)$$

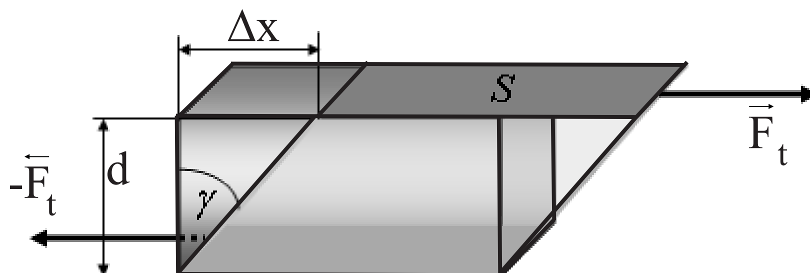
Modul objemovej pružnosti K je vždy kladný, inak by sa objem telesa stlačovaním zväčšoval, čo je v rozpore s realitou. Rovnako aj modul E musí byť kladný, takže aj výraz v zátvorke predchádzajúceho vzťahu musí byť kladný, z čoho vyplýva, že $\mu \simeq 0,5$. Zároveň $\mu > 0$ (pretože pri predlžovaní tyče sa zmenšuje jej prierez). Pre **Poissonovo číslo** teda platí

$$0 < \mu < \frac{1}{2} \ . \qquad (8.17)$$

Z meraní vyplýva, že μ leží v intervale $1/4$ a $1/2$, priemerne býva asi $0,3$. Pre krajnú hodnota $\mu = 1/2$ alebo $m = 2$ je $\chi = 0$, t.j. $\Delta V = 0\, m^3$. Objem telesa sa teda zvyšovaním tlaku nemení a teleso sa chová ako **nestlačiteľné**.

8.3 Deformácia šmykom

Ak sa jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu budú posúvať po sebe bez toho, žeby sa menila ich vzájomná kolmá vzdialenosť, hovoríme o deformácii **šmykom**. Takáto deformácia nastane, keď napr. na hranol dostatočne malej výšky (aby nenastal ohyb) bude pôsobiť dotyčnicová sila $\vec{F_t}$ (obr. 8.4).



Obrázok 8.4: Deformácia šmykom.

Vplyvom tejto sily dôjde pri hranole s plochou podstavy S a hrúbkou d k posunutiu hornej steny voči spodnej podstave o hodnotu Δx. Podľa Hookovho zákona bude táto deformácia úmerná pôsobiacej sile. Je zrejmé, že veľkosť posunu Δx pri stálej pôsobiacej sile bude úmerná hrúbke hranolu d, pretože dotyčnicové sily medzi jednotlivými vrstvami musia byť rovnako veľké, keď nastane rovnováha a vrstvy budú v pokoji. Preto je posunutie medzi dvoma susednými vrstvami v celom hranole rovnaké a posun hornej vrstvy je úmerný vzdialenosti od pevnej podstavy. Pôsobením tangenciálnej sily F_t na hornú stenu hranola o ploche S vznikne **šmykové napätie** τ

$$\tau = \frac{F_t}{S} \,. \tag{8.18}$$

Vplyvom pôsobiacej sily sa dĺžky jednotlivých strán hranola nemenia, dôjde však k **skoseniu** γ **(natočeniu o uhol** γ niekedy označované aj **pomerné posunutie)**

$$\gamma = \frac{\Delta x}{d} \,, \tag{8.19}$$

pretože pre malé uhly platí $tg\,\gamma \approx \gamma = \Delta x/d$. Hookov zákon pre šmyk potom nadobúda tvar

$$\gamma = k\,\tau = \frac{1}{G}\tau \qquad \text{alebo} \qquad \tau = G\,\gamma \,, \tag{8.20}$$

kde G je **modul pružnosti v šmyku** a jeho rozmer je taký istý ako pri ostatných moduloch ($Pa = N/m^2$). Z predchádzajúcej rovnice vyplýva (**Hookov zákon pre šmyk**):

Šmykové napätie je priamoúmerné skoseniu, pričom konštantou úmernosti je modul pružnosti v šmyku.

Z teórie pružnosti, ktorá skúma deformáciu bez prihliadnutia na molekulové procesy prebiehajúce v telese, vyplýva vzťah medzi modulom pružnosti v ťahu E, modulom pružnosti v šmyku G a Poissonovým číslom μ (prípadne Poissonovou konštantou m)

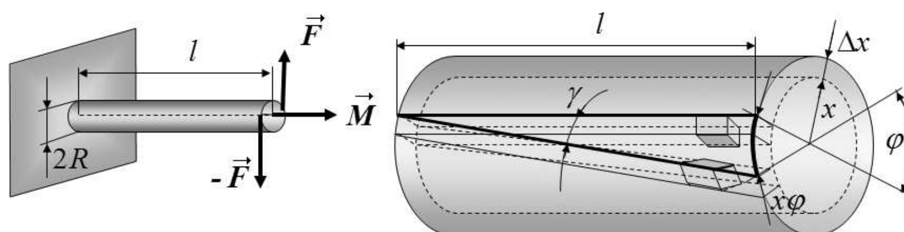
$$G = \frac{E}{2\,(1+\mu)} = \frac{m\,E}{2\,(m+1)}\ , \tag{8.21}$$

Keďže pri pružných telesách má Poissonovo číslo veľkosť $0 < \mu < \frac{1}{2}$ (8.17), z predchádzajúceho vzťahu všeobecne pre modul pružnosti v šmyku platí

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}\ . \tag{8.22}$$

8.4 Deformácia krútením

Deformáciu tuhého telesa spôsobenú krútením (torziou) možno previesť na deformáciu spôsobenú šmykom. Šmyk (presnejšie posunutie) však predstavuje homogénnu deformáciu, krútenie je deformácia nehomogénna. Deformácia krútením vzniká napr. pri krútení jedného konca tyče, ktorej druhý koniec je upevnený, prípadne pri namáhaní oboch koncov tyče dvojicami momentov síl navzájom opačného smeru, ktorých vektory sú rovnobežné s osou tyče. Pri krútení sa rôzne prierezy tyče pootočia o rôzne uhly a rôzne elementy toho istého prierezu posunú o rôznu vzdialenosť (obr. 8.5).



Obrázok 8.5: a) Deformácia tyče krútením - pôsobením dvojice síl $\vec{F}$. b) Elementárny hranolček sa deformuje ako pri šmyku.

Ak vyrežeme z tyče elementárnu trubicu s polomerom x a hrúbkou steny dx, môžeme si všimnúť, že elementárny hranolček sa deformuje podobne ako hranol z predchádzajúcej časti pri deformácii šmykom. Ak sa tyč dĺžky l skrúti na voľnom konci o uhol φ, pre skosenie γ platí

$$\gamma = \frac{x\,\varphi}{l}\ . \tag{8.23}$$

Toto skosenie vzniká šmykovým napätím τ

$$\tau = G\frac{x\,\varphi}{l}\ , \tag{8.24}$$

ktoré je dané podielom dotyčnicovej sily dF a plochy medzikružia dS $(dS = 2\,\pi\,x\,dx)$

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \frac{G\,x\,\varphi}{l}\ . \tag{8.25}$$

Elementárny moment tejto dotyčnicovej sily vzhľadom na os tyče je

$$dM = x\,dF = x\,\tau dS = \frac{G\,\varphi}{l}x^2 dS = 2\,\pi\frac{G\,\varphi}{l}x^3 dx\ . \tag{8.26}$$

Celkový krútiaci moment elementárnych síl dostaneme integráciou v hraniciach od $x = 0\,m$ po $x = R$

$$M = \int_0^R 2\pi\frac{G\,\varphi}{l}x^3 dx = \frac{\pi\,G\,\varphi}{2\,l}R^4\ . \tag{8.27}$$

Odtiaľ pre uhol pootočenia φ (v radiánoch) platí

$$\varphi = \frac{2\,M\,l}{\pi\,G\,R^4}\ . \tag{8.28}$$

Ako vidieť z predchádzajúceho vzťahu, uhol pootočenia je priamoúmerný dĺžke tyče l a nepriamoúmerný štvrtej mocnine polomeru tyče R. Pomocou tohto vzťahu je možné určovať modul pružnosti v šmyku, kde zo známych parametrov tyče (dĺžka a prierez) určíme pri statickej metóde uhol pootočenia pôsobením známeho momentu dvojice síl.

9 Mechanika kvapalín

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali mechanikou pevných telies, telies pevného skupenstva. V nasledujúcich kapitolách sa budeme zaoberať mechanikou kvapalín a plynov.

Kvapaliny a plyny sa spoločne označujú ako tekutiny. Z hľadiska vnútornej štruktúry sa od látok pevného skupenstva líšia tým, že ich molekuly už nie sú viazané na istú rovnovážnu polohu a konajú neusporiadané posuvné a rotačné pohyby. Vzdialenosti medzi molekulami bývajú v kvapalinách zvyčajne väčšie ako v tuhých telesách, ale i tu sú také malé, že medzi molekulami pôsobia vnútorné sily, i keď menšie ako v tuhých látkach. Kvapaliny si zachovávajú svoj objem, nezachovávajú si však určitý tvar. V plynoch sú už medzi molekulami také veľké vzdialenosti, že príťažlivé sily, ktoré pôsobia medzi molekulami, sú zanedbateľné. Plyny nemajú ani určitý tvar, ani objem, sú rozpínavé, stlačiteľné a pružné.

Kvapaliny a plyny majú mnoho spoločných vlastností a je medzi nimi mnoho vzájomných vzťahov. Preto budeme spoločné vlastnosti kvapalín a plynov charakterizovať súčasne. Rovnako ako pri pevných telesách je výhodné najprv študovať vlastnosti tekutín na modeloch, ktorými sú ideálna kvapalina a ideálny plyn. **Ideálna kvapalina** je kvapalina bez vnútorného trenia a považuje sa za nestlačiteľnú. Zanedbávame molekulovú štruktúru a považujeme ju za spojitú. Ideálny plyn považujeme tiež za spojitý, je bez vnútorného trenia a dokonale stlačiteľný.

9.1 Tlak v kvapalinách a plynoch

Stav kvapaliny v pokoji na určitom mieste určuje **tlak**. Tlak p je definovaný vzťahom

$$p = \frac{F}{S} \,, \tag{9.1}$$

kde F je veľkosť sily pôsobiacej kolmo na rovinnú plochu s obsahom S. Vo všeobecnosti tlak v tekutine nie je všade rovnaký. V takomto prípade je tlak daný diferenciálnym podielom $p = \mathrm{d}F/\mathrm{d}S$, kde $\mathrm{d}F$ je sila pôsobiaca kolmo na diferenciálne malú plochu s obsahom $\mathrm{d}S$.

Hlavná jednotka tlaku je **pascal**, značka Pa ($Pa = N/m^2 = kg.m^{-1}.s^{-2}$). Vedľajšími jednotkami tlaku sú: **bar** ($1\,bar = 10^5\,Pa$) a **torr** ($1\,torr = 133,32\,Pa$). Medzi atmosférou a pascalom platí prevodný vzťah: $1\,at = 9,806 \times 10^4\,Pa \doteq 10^5\,Pa$.

Ak je tlak p vo všetkých miestach tekutiny rovnaký, potom na ľubovoľne orientovanú rovinnú plochu s obsahom S, ktorá je v kontakte s tekutinou, pôsobí kolmá **tlaková sila** a pre jej veľkosť platí

$$F = p\,S\;. \tag{9.2}$$

V prípade, že tlak p bude v rôznych miestach rovinnej plochy s obsahom S rôzny, potom veľkosť kolmej tlakovej sily bude

$$F = \int_S p\,\mathrm{d}S\;. \tag{9.3}$$

Tlak v tekutine môže byť vyvolaný i vonkajšou silou (napr. pôsobením piestu vo valci s tekutinou) alebo vlastnou tiažovou silou pôsobiacou na tekutinu. Často sa uplatňuje súčasné silové pôsobenie.

9.1.1 Pascalov zákon

Pre tlak vyvolaný vonkajšou silou platí známy **Pascalov zákon: tlak vyvolaný vonkajšou silou pôsobiacou na povrch kvapaliny alebo plynu sa v nich šíri všetkými smermi a je všade rovnaký**.

Pascalov zákon sa využíva v hydraulických (pneumatických) zariadeniach. Sú to dva valce s piestami obsahov $S_1 < S_2$ spojené trubicou a naplnené kvapalinou (obr. 9.1(a)). Ak na piest s obsahom S_1 pôsobí sila F_1, vyvolá v kvapaline tlak $p_1 = F_1/S_1$. Tento tlak sa šíri kvapalinou a v mieste väčšieho piestu s obsahom S_2 kvapalina pôsobí silou veľkosti

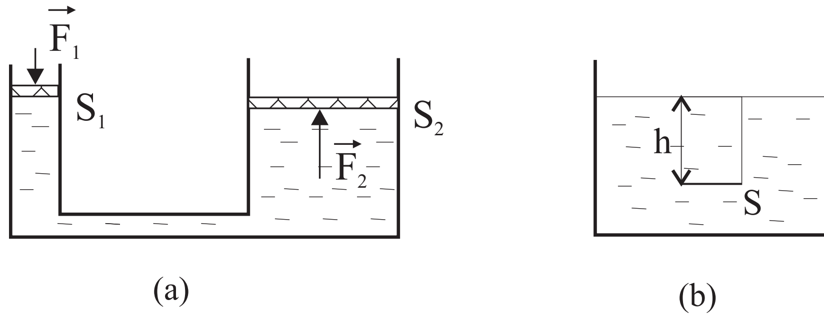
$$F_2 = p_2\,S_2 = p_1\,S_2 = F_1\,\frac{S_2}{S_1}\;.$$

Teda silou F_1 môžeme vyvolať väčšiu silu F_2.

9.1.2 Hydrostatický tlak

Hydrostatickým tlakom rozumieme všeobecne každý tlak v kvapaline, teda tlak spôsobený vlastnou tiažou kvapaliny, prípadne vonkajšou silou (napr. barometrickým tlakom vzduchu na hladinu kvapaliny). Majme nádobu naplnenú kvapalinou hustoty ρ_k. V hĺbke h si vyberme plochu s obsahom S (obr. 9.1(b)). Stĺpec kvapaliny pôsobí na plochu tiažovou silou $G = S\,h\,\rho_k\,g$ a tá vyvolá tlak

$$p_h = \frac{G}{S} = h\,\rho_k\,g\ , \tag{9.4}$$



Obrázok 9.1: (a) Hydraulický lis. (b) Hydrostatický tlak.

ktorý voláme **hydrostatický tlak**. Veľkosť tohto tlaku závisí len od hustoty kvapaliny a od hĺbky. Jeho hodnota nezávisí od tvaru nádoby a množstva kvapaliny v nej. Ak máme nádoby s rôznou plochou dna, ale je v nich rovnaká výška rovnakej kvapaliny, potom hydrostatický tlak pôsobiaci na dno týchto nádob je rovnaký - **hydrostatický paradox**.

9.1.3 Atmosférický tlak

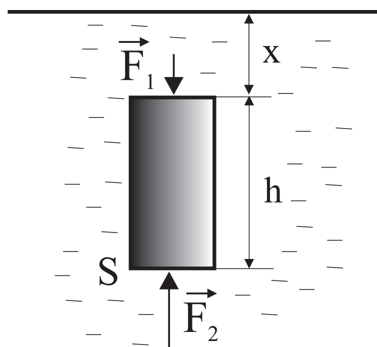
Tlak vyvolaný tiažovou silou v plyne je aerostatický tlak. Pre tento tlak neplatí vzťah (9.4), lebo hustota ρ plynu nie je v celom stĺpci konštantná. Aerostatický tlak atmosféry voláme **atmosférický tlak**. Atmosférický tlak nie je konštantný, závisí od stavu atmosféry, nadmorskej výšky a ďalších faktorov, preto bola dohodnutá hodnota **normálneho atmosférického tlaku:** $101\,325\,Pa$. Závislosť atmosférického tlaku p_a od nadmorskej výšky h vyjadruje rovnica

$$p_a = p_0\,exp\left(-\frac{\rho_0\,g}{p_0}\,h\right)\ , \tag{9.5}$$

kde ρ_0 je hustota a p_0 atmosférický tlak vo výške $h = 0\,m$.

9.2 Archimedov zákon

Na teleso ponorené do kvapaliny pôsobia v dôsledku hydrostatického tlaku tlakové sily. Tlakové sily sa vo vodorovnom smere navzájom rušia. (Keby sa nerušili, pozorovali by sme samovoľný pohyb ponoreného telesa v kvapaline.) V zvislom smere sa v dôsledku výšky telesa prejaví rozdiel tlaku v hornej a spodnej časti telesa. Vzniká **hydrostatická vztlaková sila** F_{vz}.



Obrázok 9.2: Sily pôsobiace na teleso ponorené v kvapaline.

Vyjadrime si veľkosť tejto sily. Uvažujme pevný hranol výšky h celkom ponorený do kvapaliny s hustotou ρ_k (obr. 9.2). Na hornú podstavu v hĺbke v pôsobí tlaková sila veľkosti $F_1 = S\,v\,\rho_k\,g$ a na spodnú podstavu pôsobí tlaková sila $F_2 = S\,(v+h)\,\rho_k\,g$. (Je evidentné, že $F_2 > F_1$. Výslednica síl je hydrostatická vztlaková sila, ktorá sa dá vyjadriť ako

$$F_{vz} = F_2 - F_1 = S\,h\,\rho_k\,g = V\,\rho_k\,g\ , \qquad (9.6)$$

kde $V = S\,h$ je objem ponoreného tlesa. Tento výsledok platí pre telesá ľubovoľného tvaru, dokonca i pre čiastočne ponorené. Všeobecne je tento vzťah známy ako **Archimedov[1] zákon: Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované hydrostatickou vztlakovou silou, ktorej veľkosť sa rovná tiaži kvapaliny vytlačenej ponorenou časťou telesa.**

Vyšetrime, ako sa správa teleso s objemom V a hustotou ρ_t, ktoré je celkom ponorené do kvapaliny s hustotou ρ_k. Na toto teleso pôsobí súčasne tiažová sila

[1]ARCHIMEDES ZO SYRAKÚZ (287-212 pred n.l.) bol priekopníkom vedeckej mechaniky a hydrostatiky, vynašiel libelu a Archimedovu skrutku na vyháňanie vody a veľkou mierou prispel k rozvoju matematiky. Vypočítal obvod Zeme s odchýlkou 7 km od dnešnej hodnoty.

$G = V\,\rho_t\,g$ a vztlaková sila $F_{vz} = V\,\rho_k\,g$. Môžu nastať tri prípady v závislosti od hustoty telesa: a) ak $\rho_t > \rho_k$, teleso **klesá** v kvapaline ku dnu, b) ak $\rho_t = \rho_k$, teleso sa v kvapaline **vznáša**, c) ak $\rho_t < \rho_k$, teleso **stúpa** k hladine a vynorí sa čiastočne nad hladinu - **pláva**. Rovnováha nastane za podmienky

$$V\,\rho_t\,g = V'\,\rho_k\,g\ ,$$

kde V' je objem ponorenej časti telesa.

Archimedov zákon platí aj pre plyny. Vztlaková sila v plynoch je však výrazne menšia ako v kvapalinách, lebo hustota plynov je o niekoľko rádov menšia v porovnaní s hustotou kvapalín. Pri vztlakovej sile v plynoch (napr. vzduch) sa hustota kompenzuje veľkosťou objemu ako napr. pri balónoch.

9.3 Základné pojmy hydrodynamiky

Hydrodynamika sa zaoberá usporiadaným makroskopickým pohybom častíc kvapaliny, **prúdením kvapalín**. Pri štúdiu základných vlastností prúdiacej kvapaliny budeme uvažovať ideálnu kvapalinu, t. j. nestlačiteľnú a bez vnútorného trenia. Prúdenie kvapaliny v každom bode popisujeme pomocou rýchlosti a tlaku. Rýchlosť prúdenia v kvapaline popisujeme pomocou **prúdnice**, ktorej dotyčnica má rovnaký smer ako vektory rýchlostí v daných bodoch. Prúdnice majú dve základné vlastnosti (obr. 9.3(a)). Každým bodom v prúdiacej kvapaline prechádza práve jedna prúdnica a prúdnice sa navzájom nemôžu pretínať. Prúdenie kvapaliny je **ustálené**, ak rýchlosť prúdenia nezávisí od času.

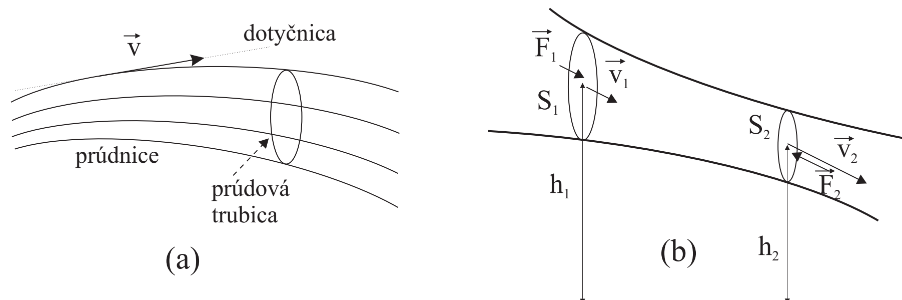
9.4 Rovnica spojitosti toku

Vnútri prúdiacej kvapaliny uvažujeme myslenú uzavretú krivku, ktorej každým bodom prechádza prúdnica. Všetky tieto prúdnice vytvárajú plochu, ktorá sa volá **prúdová trubica** (obr. 9.3(a)). Kvapalina prúdi prúdovou trubicou ako potrubím. Z okolia do tejto trubice nemôže kvapalina vtiecť ani z nej vytiecť. Pri prúdení ideálnej kvapaliny je vo všetkých bodoch prierezu prúdovej trubice rovnaká rýchlosť. Ak je plocha prierezu vybranej prúdovej trubice S a veľkosť rýchlosti prúdenia kapaliny v tomto prierezе v, za 1 sekundu pretečie týmto prierezom objem kvapaliny $Q_V = S\,v$ - **objemový prietok**. Pretože kvapalina nemôže stenami trubice - potrubia ani vtiecť, ani pritiecť,

musí byť objemový prietok pre ľubovoľný prierez prúdovej trubice rovnaký, teda

$$S_1\, v_1 = S_2\, v_2\,, \tag{9.7}$$

čo je **rovnica spojitosti (kontinuity)** pre ideálnu kvapalinu. Podľa rovnice spojitosti je rýchlosť kvapaliny menšia v širšom mieste trubice a v zúženom priereze je rýchlosť väčšia.



Obrázok 9.3: (a) Znázornenie prúdnic a prúdovej trubice. (b) Pohyb kvapaliny v prúdovej trubici meniaceho sa priemeru.

9.5 Bernoulliho rovnica

Prúdiaca kvapalina sa skladá z častíc, ktoré majú hmotnosť aj rýchlosť, a preto sa im môže priradiť kinetická energia. Prúdiaca kvapalina tiež môže prekonávať výškové rozdiely, teda má aj určitú potenciálnu energiu a taktiež môže konať prácu - napr. roztáčať koleso vodnej turbíny a pod.

Uvažujme prúdenie ideálnej kvapaliny prúdovou trubicou, ktorá sa zužuje v smere prúdenia (obr. 9.3(b)). Podľa rovnice spojitosti (9.7) sa bude, ako už bolo povedané, kvapalina pohybovať v zúženom mieste väčšou rýchlosťou. Kinetická energia elementárnej hmotnosti kvapaliny $\mathrm{d}m$ prechádzajúcej cez prierezy S_1 a S_2 narastie o hodnotu

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\, v_2^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\, v_1^2\,. \tag{9.8}$$

Podľa zákona zachovania energie (4.38) sa tieto zmeny energií musia kompenzovať úbytkom energie iného druhu alebo vykonaním práce.

Vzhľadom na to, že platí $v_2 > v_1$, získa kvapalina medzi prierezmi S_1 a S_2 zrýchlenie, na ktoré je podľa II. Newtonovho pohybového zákona potrebná

určitá sila. Medzi sily, ktoré pôsobia na kvapalinu medzi prierezmi S_1 a S_2 patrí hlavne váha daného množstva kvapaliny. Ďalšie sily sú tlakové $p_1\,S_1$ a $p_2\,S_2$, ktorými na túto časť kvapaliny pôsobí kvapalina, ktorá je v prúdovej trubici pred a za ňou. (Tlaky v priereze S_1 a S_2 boli označené ako p_1, resp. p_2). Je zrejmé, že práca súvisiaca s hmotnosťou zodpovedá zmene potenciálnej energie medzi výškami h_1 a h_2. Platí teda

$$\Delta E_p = \mathrm{d}m\, g\,(h_1 - h_2)\;. \tag{9.9}$$

Práca, ktorú vykonajú tlakové sily, sa dá podľa nášho obrázku vyjadriť ako

$$\Delta W = p_1\,S_1\,v_1\,\mathrm{d}t - p_2\,S_2\,v_2\,\mathrm{d}t\;, \tag{9.10}$$

kde $S_i\,v_i\,\mathrm{d}t$; $i = 1, 2$ sú objemy, ktoré pretečú za jednotku času cez dané plochy. Záporné znamienko pri druhom člene znamená, že tlaková sila na spodnom konci prierezu S_2 pôsobí proti smeru jej pohybu.

Podľa zákona zachovania energie musí platiť $\Delta E_k = \Delta E_p + \Delta W$, môžeme teda zo vzťahov (9.8), (9.9) a (9.10) písať

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v_1^2 = \mathrm{d}m\,g\,(h_1 - h_2) + p_1\,S_1\,v_1\,\mathrm{d}t - p_2\,S_2\,v_2\,\mathrm{d}t\;.$$

V prípade, že kvapalina je nestlačiteľná, je jej hustota $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$ konštantná a kvapalina hmotnosti $\mathrm{d}m$ má i stály objem, teda platí $\mathrm{d}V = S_1\,v_1\,\mathrm{d}t = S_2\,v_2\,\mathrm{d}t$. Pokiaľ predošlú rovnicu vydelíme týmto objemom, dostaneme po úprave vzťah

$$\frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\,\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,h_2 + p_2\;, \tag{9.11}$$

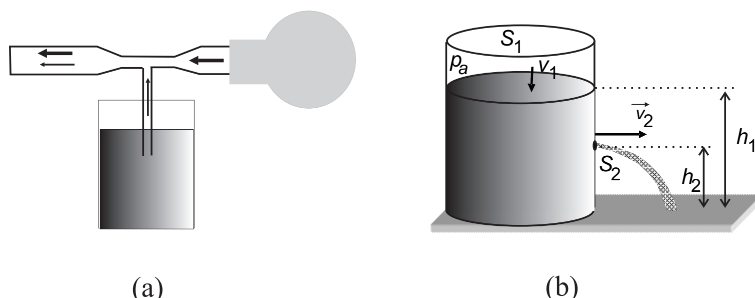
ktorý sa volá **Bernoulliho[2] rovnica**. Táto rovnica vyjadruje zákon zachovania mechanickej energie pri prúdení ideálnej kvapaliny. Z rozmerov jednotlivých členov vyplýva, že prvý člen predstavuje kinetickú energiu kvapaliny, druhý potenciálnu energiu kvapaliny jednotkového objemu a tretí člen možno interpretovať ako tlakovú potenciálnu energiu objemovej jednotky kvapaliny. Z Bernoulliho rovnice vyplýva, že súčet kinetickej, potenciálnej a tlakovej potenciálnej energie objemovej jednotky ideálnej kvapaliny je všade v kvapaline rovnaký.

[2]DANIEL BERNOULLI (1700 – 1782) bol švajčiarsky matematik, fyzik a medik. Významne prispel v oblastiach teórie diferenciálneho počtu, matematických rád, štatistiky a pravdepodobnostného počtu a teoretickej mechaniky. Formuloval základné zákony o prúdení tekutín, stal sa zakladateľom hydrodynamiky (napr. Bernoulliho rovnica).

9.6 Použitie Bernoulliho rovnice

Mechanický rozprašovač

V zúženej časti prúdovej trubice je väčšia rýchlosť prúdiacej kvapaliny ako v časti širšej, ale tlak v užšej časti je menší ako v širšej. Vhodným zúžením prúdovej trubice je možné dosiahnuť, aby tlak v tejto časti trubice bol menší ako atmosférický. Ak v zúženom mieste urobíme vývod do kvapaliny (obr. 9.4(a)), tak pokles tlaku v tomto mieste spôsobený zvýšenou rýchlosťou prúdenia vzduchu bude prisávať kvapalinu z nádoby. Na tomto princípe pracujú rozprašovače, vodné vývevy a Venturiho trubica na meranie rýchlosti prúdenia plynu.



Obrázok 9.4: (a) Mechanický rozprašovač. (b) Vytekanie vody zo suda.

Výtok kvapaliny otvorom v stene nádoby

Ako aplikáciu Bernoulliho rovnice vyšetríme vytekanie kvapaliny malým otvorom v stene nádoby. Majme nádobu výšky h_1, ktorá má otvor v bočnej stene v hĺbke $h = h_1 - h_2$ pod hladinou vody v nádobe. Prúdenie vody v nádobe je popísané Bernoulliho rovnicou. Keďže tlak v okolí nádoby je atmosférický p_a, Bernoulliho rovnica pre takúto nádobu bude mať tvar

$$\frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,h_1 + p_a = \frac{1}{2}\,\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,h_2 + p_a\ .$$

Predpokladajme, že otvor má taký malý obsah, že rýchlosť vytekania kvapaliny je vo všetkých jeho miestach rovnaká a že rýchlosť v_1 poklesu hladiny v nádobe vzhľadom na rýchlosť v_2 možno zanedbať ($v_1 = 0\,m/s$). Po úprave predošlého vzťahu dostaneme **Torricelliho vzorec**, ktorý udáva rýchlosť vytekania kva-

paliny otvorom v hĺbke h pod hladinou a jeho vyjadrenie má tvar

$$v_2 = \sqrt{2\,g\,h}\ . \tag{9.12}$$

Táto rýchlosť je rovnaká ako rýchlosť, ktorú by získalo teleso padajúce z výšky h voľným pádom (6.22).

9.7 Prúdenie reálnej kvapaliny

Voda a iné kvapaliny sa pri prúdení správajú ako ideálna kvapalina. Pri prúdení reálnej kvapaliny sa objavujú v kvapaline sily brzdiace jej pohyb, ktoré majú pôvod vo vzájomnom silovom pôsobení častíc kvapaliny. Tieto sily sa nazývajú sily vnútorného trenia.

Pri meraní rýchlosti častíc prúdiacej reálnej kvapaliny v jednotlivých bodoch prierezu trubice zistíme, že tieto rýchlosti nie sú rovnaké. Kvapalina priľne k stenám trubice a vytvorí sa medzná vrstva kvapaliny, ktorá je voči stenám trubice takmer v pokoji. Smerom od steny k osi trubice rýchlosť prúdenia rastie a nadobúda maximálnu veľkosť na osi trubice. Keď si vyberieme konkrétnu hodnotu rýchlosti v a pospájame body, ktoré sa touto rýchlosťou vyznačujú, zistíme, že geometricky vytvárajú plášť valca s polomerom r. To isté bude platiť pre body, ktoré sa vyznačujú rýchlosťou $v + dv$, tie vytvoria plášť valca s polomerom $r + \mathrm{d}r$ (obr. 9.5(a)). Keďže tieto valcové plochy sa pohybujú vzhľadom na seba rýchlosťou $\mathrm{d}v$, vzniká medzi nimi trenie, ktoré vyvoláva silové účinky medzi týmito dvoma plochami. Tieto silové účinky môžeme charakterizovať vektorom tangenciálneho napätia $\vec{\tau}$, ktorého smer je totožný so smerom vektora rýchlosti prúdenia kvapaliny a pre jeho veľkosť platí vzťah

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\ , \tag{9.13}$$

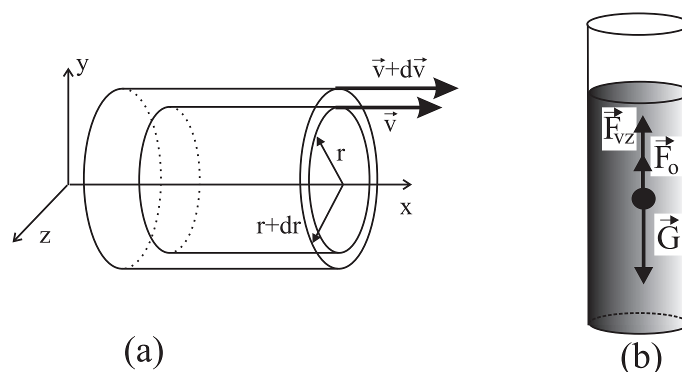
kde η je *koeficient dynamickej viskozity* a charakterizuje viskózne vlastnosti kvapaliny. Jednotkou dynamickej viskozity je $1\,Pa.s$. Dynamická viskozita väčšiny kvapalín je rádove $10^{-3}\,Pa.s$, pričom jej hodnota je závislá od teploty a tlaku. Ďalšou veličinou, ktorá charakterizuje prúdenie reálnej kvapaliny, je **kinematická viskozita** ν, definovaná podielom dynamickej viskozity η a hustoty ρ kapaliny: $\nu = \eta/\rho$.

Prúdenie reálnej kvapaliny, pri ktorom sa jednotlivé vrstvy kvapaliny pravidelne posúvajú v smere prúdu, sa nazýva *laminárne (tzn. vrstvové)*. Pri zvyšovaní rýchlosti prúdiacej kvapaliny v kvapaline začnú vznikať zložky rýchlosti

kolmé na smer prúdu a jednotlivé vrstvy prúdiacej kvapaliny sa začnú premiešavať z dôvodu vzniku vírov v kvapaline. Takéto prúdenie nazývame *turbulentné (tzn. vírové).* Pre rozdelenie prúdenia na laminárne a turbulentné sa používa bezrozmerná veličina, ktorá sa nazýva **Reynoldsovo číslo** R_e. Pre prúdenie kvapaliny trubicou kruhového prierezu je Reynoldsovo číslo dané vzťahom

$$R_e = \frac{v\,d}{\nu}\,, \tag{9.14}$$

kde v je veľkosť strednej rýchlosti častíc kvapaliny v trubici s priemerom d a ν je kinematická viskozita kvapaliny. Kritické Reynoldsovo číslo pre stabilné laminárne prúdenie bolo stanovené experimentálne na hodnotu ≈ 2000.



Obrázok 9.5: (a) Prúdenie kvapaliny (b) Sily pôsobiace na padajúcu guľôčku v kvapaline.

9.8 Obtekanie telies

Riešme teraz jednoduchú úlohu pádu guľôčky v kvapaline, ktorá má podstatne väčší objem ako teleso (napr. ložisková guľôčka v sude na vodu). Po vložení guľôčky do kvapaliny a následujúcom pustení pôsobia na ňu nasledujúce sily: tiažová G smerom dole, vztlaková F_{vz} smerom nahor a odporová sila F_o prostredia (kvapaliny) tiež smerom nahor, proti smeru pohybu (obr. 9.5(b)). Odporová sila je dôsledkom viskozity kvapalín a vznikom vírov v kvapalinách pri obtekaní telies.

Malá guľôčka sa v kvapaline nebude pohybovať veľkými rýchlosťami, takže okolo nej nebudú vznikať víry, teda obtekanie telesa môžno považovať za laminárne. V tomto prípade je odporová sila spôsobená len viskozitou kvapaliny.

Tenká vrstva kvapaliny, ktorá je v styku s povrchom telesa, sa nepohybuje. Silové pôsobenie kvapaliny na teleso sa tak uskutočňuje pomocou trecích síl, ktoré vznikajú medzi jednotlivými vrstvami kvapaliny. Pri takomto prúdení je odporová sila daná Stokesovým[3] zákonom. Podľa neho je odporová sila úmerná prvej mocnine rýchlosti, koeficientu dynamickej viskozity a lineárnym rozmerom telesa. Podľa tohto zákona je odporová sila guľôčky F_o pri rovnomernom pohybe v kvapaline vyjadrená pomocou tzv. **Stokesovho vzorca** v tvare

$$F_o = 6\,\pi\,\eta\,r\,v, \qquad (9.15)$$

kde η je koeficient dynamickej viskozity kvapaliny, r je polomer guľôčky a v je rýchlosť jej pohybu v nepohybujúcej sa kvapaline.

Na základe znalosti Stokesovho vzorca je možné určiť ustálenú rýchlosť padajúcej guľôčky vo viskóznej kvapaline. Guľôčka po uvoľnení v kvapaline padá voľným pádom. Výsledná sila pôsobiacia na guľôčku sa dá zapísať ako

$$F = G - F_{vz} - F_o\,. \qquad (9.16)$$

Pri páde guľôčky jej rýchlosť postupne rastie, no so zvyšovaním rýchlosti rastie aj odporová sila (9.15). V určitom okamihu je odporová sila taká veľká, že výsledná sila (9.16) bude nulová. V tomto okamihu sa vykompenzujú všetky sily pôsobiace na guľôčku a jej pohyb bude už ďalej rovnomerný. Po vyjadrení jednotlivých síl vo vzťahu (9.16) ($G = m\,g = V\rho_t\,g$, $F_{vz} = V\,\rho_k\,g$ (9.6) a F_o zo vzťahu (9.15)) dostaneme

$$V\rho_t\,g = \rho_k\,V\,g + 6\,\pi\,\eta\,r\,v\,,$$

g je gravitačné zrýchlenie, η je koeficient dynamickej viskozity kvapaliny, v je ustálená rýchlosť guľôčky, ρ_k je hustota kvapaliny, ρ_t je hustota kvapaliny a $V = 4/3\,\pi\,r^3$ je objem guľôčky. Úpravou predošlého vzťahu sa dá vyjadriť ustálená rýchlosť guľôčky v tvare

$$v = \frac{2\,(\rho_t - \rho_k)\,g\,r^2}{9\,\eta}\,. \qquad (9.17)$$

Ústálená rýchlosť padajúcej guľôčky vo viskóznej kvapaline závisí od druhej mocniny jej polomeru a nepriamoúmerne od koeficientu dynamickej vyskozity. Vzťah (9.17) sa využíva na experimentálne určenie koeficientu dynamickej viskozity kvapaliny η. Pokiaľ však experiment robíme vo valci konečného priemeru, treba výslednú viskozitu korigovať.

[3]JONATHAN STOKES (1755 – 1831) bol anglický fyzik, lekár a botanik, člen Birmingham Lunar Society.

Pri väčších rýchlostiach sa obtekanie telesa stáva turbulentným, tzn. vírovým. Pri takomto prúdení sa na rozdiel od laminárneho prúdenia časť energie dodanej telesu mení na kinetickú energiu vírov, ktorá sa potom v dôsledku trenia mení na teplo. Pri tomto type prúdenia môžeme odporovú silu vyjadriť v tvare

$$F_o = C\, S\, \frac{\rho\, v^2}{2}\,, \tag{9.18}$$

kde C je bezrozmerný odporový súčiniteľ závislý od tvaru telesa, S je plocha priečneho prierezu telesa, ρ je hustota kvapaliny a v je rýchlosť telesa v nepohybujúcej sa kvapaline. Súčiniteľ C nadobúda hodnoty, napr. pre kruhovú dosku orientovanú kolmo na smer pohybu $C = 1,12$, pre guľu $C = 0,4$ a pre teleso kvapkovitého tvaru $C = 0,04$.

10 Kmitanie

S kmitavými pohybmi sa stretávame všade okolo nás. Niekedy je kmitanie žiaduce (chvenie v prípade hudobných nástrojov), inokedy je nežiaduce (napr. kmitanie auta, práčky). Niekedy ho vnímame (chvenie struny, membrány v telefónnom reproduktore, slúchadle), inokedy si ho uvedomujeme veľmi málo (kmitanie molekúl vzduchu, ktoré prenášajú zvuk, kmitanie kremenných kryštálov v náramkových hodinkách).

V reálnom svete je kmitanie zvyčajne tlmené. Trecie sily a odpor prostredia postupne premieňajú mechanickú energiu na teplo, a tak sa pohyb postupne zmenšuje. Ak budeme energiu dopĺňať, nielenže zabránime stratám, ale za určitých podmienok sa môže výchylka pri kmitavom pohybe zväčšovať (napr. pohyb detí na hojdačke).

10.1 Harmonický pohyb

Akýkoľvek pohyb, ktorý sa opakuje v pravidelných intervaloch sa nazýva **periodický pohyb** alebo **kmitanie**. Podľa veličín, s ktorými sa pri kmitaní stretávame, hovoríme o kmitoch mechanických, elektrických atď. Pod pojmom **harmonický oscilátor** budeme rozumieť každé voľné zariadenie, ktoré môže voľne kmitať bez vonkajšieho pôsobenia, napríklad závažie zavesené na pružine po vychýlení z rovnovážnej polohy, fyzikálne kyvadlo pri malých odchýlkach a pod. Potom hovoríme, že mechanické oscilátory vykonávajú **kmitavý pohyb**. Trajektória kmitavého pohybu môže byť priamočiara aj krivočiara, ale pohyb sa vždy uskutočňuje po tej istej krivke (alebo aspoň jej časti). **Rovnovážna poloha** predstavuje polohu, v ktorej sú sily pôsobiace na oscilátor v rovnováhe, t. j. ich výslednica sa rovná nule. Je to poloha, v ktorej by sa kmitajúci objekt nachádzal, keby bol v pokoji. Kmitanie oscilátorov spôsobuje buď sila pružnosti, ktorá vzniká pri deformácii

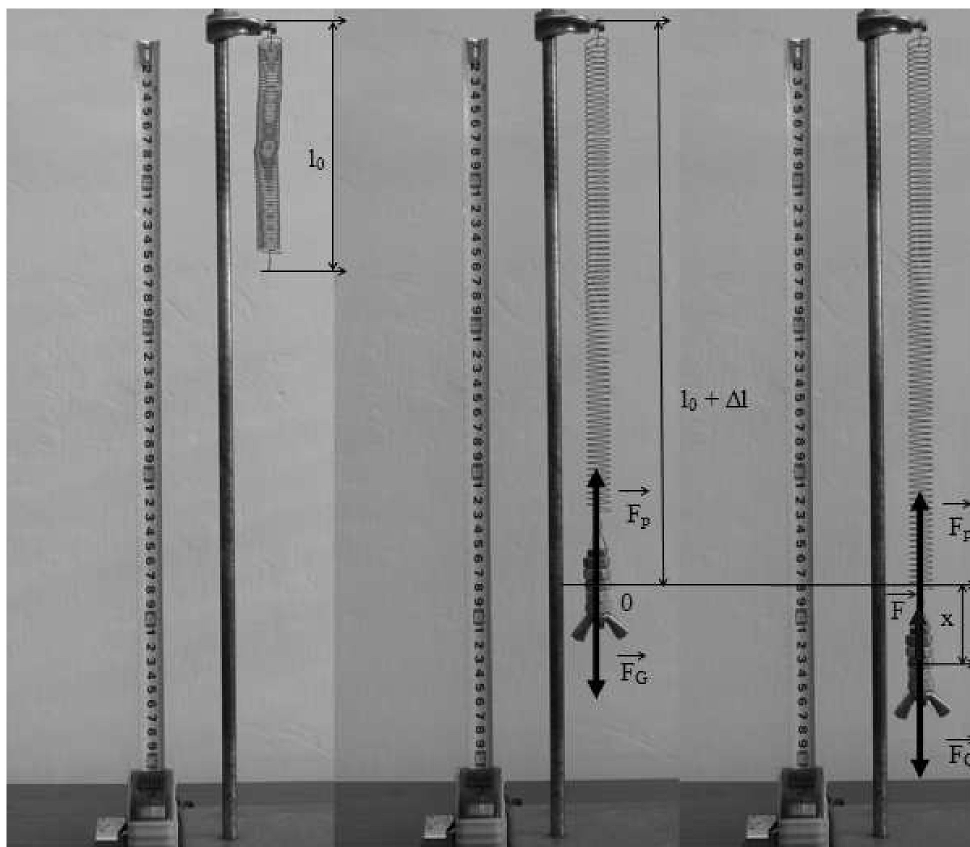
pružiny alebo tiažová sila. (Predpokladáme pri tom, že nedochádza k trvalým zmenám pružiny a pre deformáciu pružiny (predĺženie alebo stlačenie) platí Hookov zákon (8.4) a deformácia pružiny je priamoúmerná pôsobiacej sile.) Na úvod sa budeme venovať jednoduchým kmitavým pohybom po priamke. Tejto požiadavke najlepšie vyhovuje kmitanie závažia zaveseného na pružine. Takýto oscilátor sa nazýva **pružinový oscilátor** (obr. 10.1). Najjednoduchším mechanickým oscilátorom, ktorého kmitanie spôsobuje tiažová sila a pohyb sa uskutočňuje po časti kružnice je **kyvadlo**. V minulosti malo veľký význam ako zariadenie na meranie času (kyvadlové hodiny). Hlavnom črtou oscilátora je, že po istom čase sa dostane do rovnakej polohy, má tú istú rýchlosť a zrýchlenie. Periodicky sa opakujúcu časť kmitavého pohybu nazývame **kmit**, polovička kmitu je **kyv**. Charakteristické veličiny kmitavého pohybu sú **perióda** (**doba kmitu**) T alebo **frekvencia (kmitočet)** f, s ktorými sme sa už stretli v kinematike hmotného bodu. Perióda predstavuje dobu, za ktorú oscilátor prebehne jeden kmit a vráti sa do zvoleného počiatočného stavu. Jednotkou periódy je sekunda. Frekvencia sa rovná počtu kmitov, ktoré prebehnú za jednu sekundu. Je teda prevrátenou hodnotou periódy a udáva sa v hertzoch[1] (Hz). Ak je možné kmitavý pohyb matematicky popísať jednou harmonickou funkciou, hovoríme, že teleso vykonáva **harmonický kmitavý pohyb**. Ak na teleso bude pôsobiť výsledná sila, ktorá je priamoúmerná jeho výchylke pri pohybe po priamke budeme takúto kmitajúcu sústavu označovať **netlmený lineárny harmonický oscilátor**. V prípade priamočiareho pohybu, kedy už uvažujeme o odpore prostredia, hovoríme o kmitajúcej sústave ako o **tlmenom lineárnom harmonickom oscilátore.** Ak na takýto oscilátor bude pôsobiť vonkajšia periodická sila, hovoríme o **vynútených kmitoch**. Ak bude kmitanie prebiehať bez vplyvu vonkajších síl, budeme hovoriť o **vlastných kmitoch**.

10.1.1 Kinematika a dynamika kmitavého pohybu

Kým pružina oscilátora nie je zaťažená závažím, má dĺžku l_0 (obr. 10.1). Keď na pružinu zavesíme závažie, pružina sa pôsobením tiaže $\vec{G} = m\,\vec{g}$ závažia

[1]HEINRICH HERTZ (1857 – 1894) nemecký fyzik a objaviteľ elektromagnetických vĺn. Existenciu elektromagnetických vĺn dokázal odrazom, ohybom a lomom, podobne ako je to pri zvukových vlnách. Jeden vodič (oscilátor) rozkmital iskrovým výbojom a na vzdialenom druhom (rezonátore) pozoroval preskakujúce iskry ako dôkaz kmitania, dopadu elektromagnetickej vlny.

predĺži na dĺžku $l = l_0 + \Delta l$, pričom sa pružina deformuje (v inerciálnej vzťažnej sústave majú tiažová sila $\vec{F}_G$, ktorou je závažie priťahované k Zemi a tiaž $\vec{G}$, ktorou pôsobí závažie na záves, rovnakú veľkosť aj smer). V dôsledku pružnosti pružiny vznikne sila $\vec{F}_p$, ktorej veľkosť sa v závislosti od predĺženia zväčšuje a ktorá má opačný smer ako tiažová sila $\vec{F}_G$. Jej veľkosť je $F_p = k\,(l - l_0) = k\,\Delta l$, kde k je tuhosť pružiny. **Tuhosť pružiny** $k = F_p/\Delta l$ zodpovedá sile, ktorá spôsobí predĺženie o jeden meter. Sila F_p sa bude zväčšovať až do okamihu, pokiaľ nenastane rovnovážny stav, teda sily $\vec{F}_G$ a $\vec{F}_p$ sa nevyrovnajú.



Obrázok 10.1: K vysvetleniu kmitania mechanického oscilátora.

Pri tomto stave pôsobia na závažie sily rovnako veľké, ale opačne orientované. Závažie sa ustáli v rovnovážnej polohe O, do ktorej umiestnime začiatok vzťažnej sústavy, v ktorej platí $\vec{F}_p = -\vec{F}_G$. Ďalším predĺžením pružiny sa rovnováha poruší. Sila pružnosti sa zväčší, kým tiažová sila ostáva konštantná. Výslednica pôsobiacich síl bude pôsobiť nahor smerom do rovnovážnej

polohy. (To platí, ak predĺženie smeruje nadol, v opačnom prípade stlačenia pružiny nahor bude výslednica síl smerovať nadol, ale opäť do rovnovážnej polohy.) To znamená, že na oscilátor v prípade akejkoľvek deformácie pružiny bude pôsobiť premenlivá sila, ktorá je príčinou kmitavého pohybu. Ak teda vychýlime závažie z rovnovážnej polohy v smere osi x a teleso uvoľníme, sila mu udelí zrýchlenie a závažie bude voľne kmitať. Okamžitá poloha závažia je určená súradnicou x, ktorú nazývame **okamžitá výchylka**. Okamžitá výchylka vzhľadom na rovnovážnu polohu dosahuje kladné aj záporné hodnoty. Najväčšia hodnota okamžitej výchylky sa nazýva **amplitúda výchylky** x_m.

Pri okamžitej výchylke x bude pôsobiť na oscilátor celková sila veľkosti

$$F = F_G - F_p = m\,g - k\,(\Delta l + x)\ . \tag{10.1}$$

Keďže platí $m\,g = k\,\Delta l$, je príčinou kmitania sila, ktorej priemet do osi x je

$$F = -k\,x\ . \tag{10.2}$$

Môžeme teda konštatovať, že harmonický pohyb mechanického oscilátora je spôsobený silou F, ktorá stále smeruje do rovnovážnej polohy a je priamoúmerná okamžitej výchylke. Keďže uvažujeme, že pohyb oscilátora nie je ovplyvňovaný vonkajšími silami (prípadne ich vplyv môžeme zanedbať), môžeme jeho harmonický pohyb považovať za **vlastné kmitanie**. (Vlastné kmitanie oscilátora prebieha iba s istou uhlovou frekvenciou ω_0, ktorá súvisí s vlastnosťami oscilátora.) Sústava pružina + teleso na obrázku 10.1 sa nazýva **harmonický**, niekedy aj **lineárny harmonický oscilátor,** čo znamená, že sila je úmerná prvej (a nie inej) mocnine výchylky x.

Ak chceme riešiť pohybovú rovnicu vlastného kmitania oscilátora, prepíšeme si ju do tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x\ . \tag{10.3}$$

Krátkou úpravou dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0\ . \tag{10.4}$$

Keď zavedieme substitúciu $\omega_0^2 = k/m$, dostaneme rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = 0\ . \tag{10.5}$$

Daná rovnica (10.5) je lineárnou diferenciálnou rovnicou 2. rádu. Jej spôsob riešenia presahuje rámec tejto knihy, preto v ďalšom kroku budeme používať zovšeobecnené riešenie pohybovej rovnice pre vlastné (netlmené) kmitanie harmonického oscilátora, ktoré má tvar

$$x(t) = x_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) , \tag{10.6}$$

kde x predstavuje okamžitú výchylku v čase t, x_m je maximálna výchylka (spodný index m znamená maximum) alebo aj **amplitúda kmitov**, argument $(\omega_0 t + \varphi)$ je **fáza kmitu** a φ je **fázová konštanta** (alebo začiatočná fáza kmitavého pohybu v čase $t = 0\, s$.) Môže mať kladnú aj zápornú hodnotu a meria sa v zvyčajne v radiánoch. Obidve konštanty x_m a φ vyplývajú z počiatočných podmienok a určujú hodnotu výchylky na začiatku pohybu (v čase $t = 0\, s$). Keďže funkcia kosínus v rovnici (10.6) sa mení medzi krajnými hodnotami ± 1, výchylka $x(t)$ sa bude meniť medzi krajnými hodnotami $\pm x_m$.

Vysvetlíme si teraz fyzikálny význam konštanty ω_0. Doba, za ktorú sa teleso dostane znova do tej istej polohy a nazýva sa **perióda kmitov** (T_0). Z toho vyplýva, že pre ľubovoľný čas t musí platiť $x(t) = x(t + T_0)$. Pre jednoduchosť uvažujme $\varphi = 0\, rad$ a zapracujme túto úvahu do rovnice (10.6). Následne dostávane

$$x_m \cos(\omega_0 t) = x_m \cos(\omega_0 (t + T_0)) .$$

Keďže funkcia kosínus je periodická s periódou $2\pi\ rad$, z predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\omega_0 t + 2\pi = \omega_0 (t + T_0) ,$$

odtiaľ

$$2\pi = \omega_0 T_0 .$$

Ak zakomponujeme do predchádzajúceho vzťahu známy vzťah medzi periódou a frekvenciou a použitú substitúciu z rovnice (10.5), dostávame

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} . \tag{10.7}$$

Veličina ω_0 definovaná predchádzajúcim vzťahom sa nazýva **uhlová frekvencia** (tiež **kruhová frekvencia**) pohybu a jej jednotka v sústave SI je radián za sekundu, fyzikálny rozmer je s^{-1}. Jednoduchý kmitavý pohyb je periodický,

priamočiary a nerovnomerný. Využitím predchádzajúceho vzťahu môžeme vyjadriť **periódu vlastných kmitov** netlmeného harmonického oscilátora

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{10.8}$$

Frekvencia netlmených kmitov f_0 predstavuje počet kmitov za jednotku času

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{10.9}$$

Zaujímavosťou je, že frekvencia kmitania nijako nezávisí od toho, ako veľmi sme pružinu natiahli, čiže od veľkosti amplitúdy kmitov. Ako môžeme zo vzťahu (10.9) vidieť, závisí len od hmotnosti kmitajúceho telesa a konštanty - tuhosti pružiny.

V literatúre sa taktiež môžeme stretnúť s riešením pohybovej rovnice (10.5) v tvare $x = x_m\,\sin(\omega_0\,t{+}\varphi)$, čo zodpovedá rovnici (10.6), ibaže hodnota fázovej konštanty je posunutá o $\pi/2$, čo vyplýva z vlastností funkcie sínus a kosínus.

Pre vyjadrenie rýchlosti kmitavého pohybu využijeme znalosti z kinematiky hmotného bodu, kedy rýchlosť telesa pohybujúceho sa po priamke je daná ako derivácia jeho polohy podľa času. Môžeme teda písať

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x_m\,\omega_0\sin(\omega_0\,t+\varphi) = x_m\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t+\varphi+\frac{\pi}{2})\,. \tag{10.10}$$

Podobne, ako bol parameter x_m v rovnici (10.6) nazvaný amplitúdou, z predchádzajúcej rovnice vyplýva, že amplitúda rýchlosti je rovná $v_m = x_m\,\omega_0$. Zrýchlenie kmitavého pohybu telesa určíme ako deriváciu rýchlosti daného telesa podľa času (prípadne druhú deriváciu výchylky podľa času).

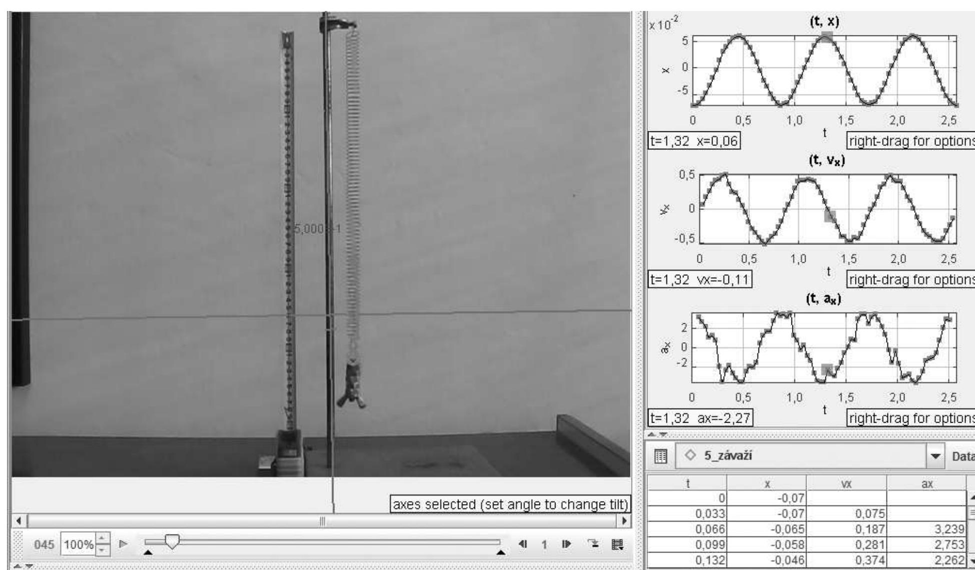
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -x_m\,\omega_0^2\,\cos(\omega_0\,t+\varphi) = x_m\,\omega_0^2\cos(\omega_0\,t+\varphi+\pi) = -\omega_0^2\,x\,. \tag{10.11}$$

Kladná veličina $x_m\,\omega_0^2$ predstavuje v tomto prípade amplitúdu zrýchlenia a_m. Za povšimnutie stojí, že rýchlosť predbieha výchylku vo fáze o $\pi/2$ a zrýchlenie predbieha výchylku vo fáze o uhol π (obr. 10.2). Zo vzťahu taktiež vyplýva, že zrýchlenie kmitavého pohybu je priamoúmerné okamžitej výchylke a v každom okamihu má opačný smer.

Z predchádzajúceho vzťahu pre zrýchlenie kmitavého pohybu $a(t) = -\omega_0^2\,x(t)$ a substitúcie zavedenej v rovnici (10.5) dostávame

$$a(t) = -\frac{k}{m}\,x(t)\,, \quad \text{kde} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2\,. \tag{10.12}$$

Zo vzťahu vyplýva, že zrýchlenie kmitajúceho telesa je úmerné jeho výchylke a má opačné znamienko, pričom konštantou úmernosti je druhá mocnina uhlovej frekvencie, ktorá zas závisí len od vlastností samotného oscilátora, t. j. od jeho hmotnosti a tuhosti pružiny (tieto veličiny sa nazývajú tiež aj parametre oscilátora). Najväčšia kladná hodnota výchylky bude zodpovedať zápornému zrýchleniu s najväčšou veľkosťou a naopak. Ak bude výchylka nulová, zrýchlenie bude taktiež nulové, avšak veľkosť rýchlosti kmitavého pohybu v danom okamihu bude maximálna.

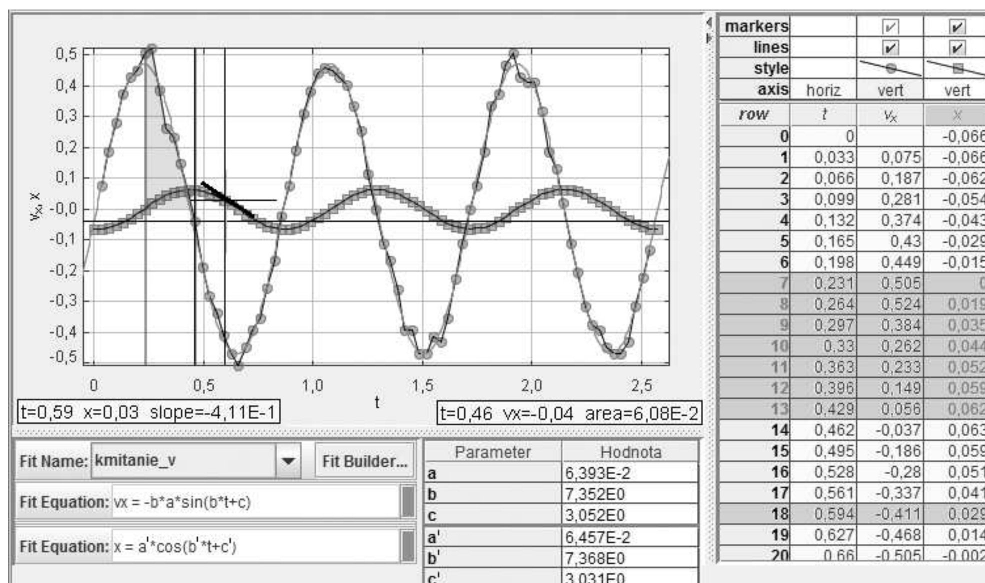


Obrázok 10.2: Analýza vlastných kmitov harmonického pohybu pružinového oscilátora.

Časový priebeh harmonického kmitania telesa je znázornený na obr. 10.2. Súradnicovú sústavu sme pre lepšiu analýzu pootočili o $\pi/2$, takže kladný smer osi x bude smerovať zvislo nadol. Detailnejšou analýzou časových závislosti možno usúdiť (obr. 10.3), že kmitavý pohyb možno popísať rovnicami $x(t) = 0,065 \cos(7,4\,t + 3,03)$ (okamžitú výchylku oscilátora predstavujú štvorčeky) a $v_x = -7,4.0,064 \sin(7,4\,t + 3,05)$ (okamžitá rýchlosť je znázornená guľôčkami), z čoho vyplýva, že amplitúda kmitov je $x_m = 0,065\,m$, uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega_0 = 7,4\ rad\,s^{-1}$ a fázová konštanta kmitavého pohybu je $\varphi \approx 3,03\,rad$.

Aj v prípade tohto pohybu možno v ktoromkoľvek okamihu určiť rýchlosť

kmitavého pohybu v čase t ako smernicu dotyčnice ku grafu okamžitej výchylky v danom bode (obr. 10.3 - v čase $t = 0,59\,s$ má smernica dotyčnice hodnotu $-0,411\ m/s$, čo zodpovedá rýchlosti pohybu v danom čase určenej z tabuľky: $v_x(0,594\,s) = -0,411\ m/s$) a okamžitú výchylku v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti od času (obr. 10.3 - obsah vyznačenej plochy je $0,061\,m$, čo zodpovedá zmene okamžitej výchylky vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{13} - t_7 = 0,429\,s - 0,231\,s = 0,198\,s$: $\Delta x = x_{13} - x_7 = 0,062\,m$).



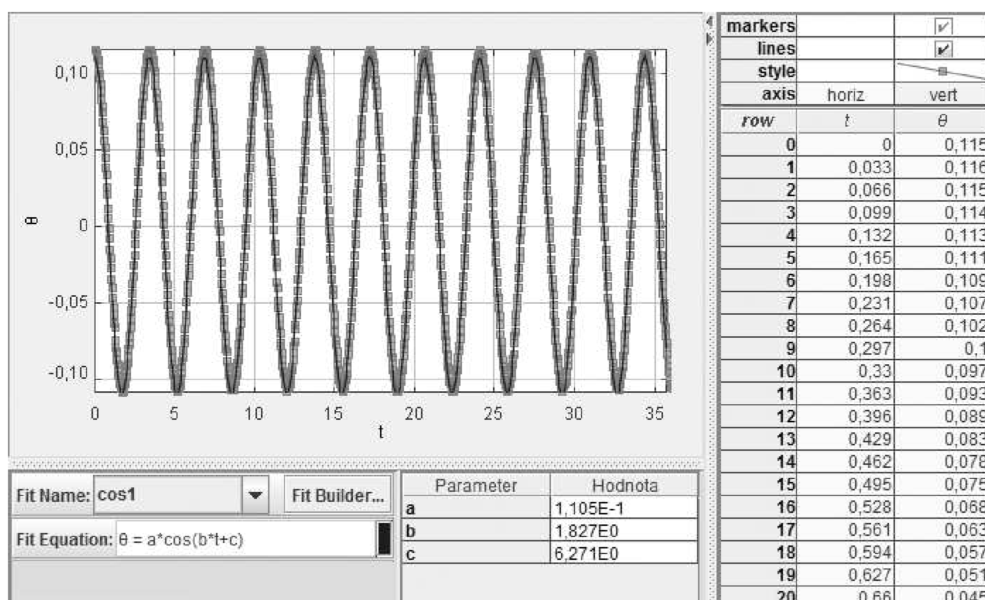
Obrázok 10.3: Analýza rýchlosti (guľôčky) a výchylky (štvorčeky) harmonického pružinového oscilátora.

Ako netlmený harmonický pohyb si s dostatočnou presnosťou môžeme predstaviť pohyb hmotnej gule zavesenej na vlákne zanedbateľnej hmotnosti oproti guli po slabom vychýlení z rovnovážnej polohy (uvažujeme o výchylkách do 5°, kedy $\sin\alpha \approx \alpha$ (kde α je v radiánoch)). Takýto oscilátor v ideálnom prípade môžeme považovať za matematické kyvadlo, s popisom ktorého sme sa už stretli v predchádzajúcich kapitolách (7.9.2 Matematické kyvadlo). Ak bude uhlová výchylka matematického kyvadla malá, môžeme ho považovať za harmonický oscilátor, podobný sústave pružina-teleso. Úlohu tuhosti pružiny k tu bude zohrávať veličina $m\,g/L$. Pre periódu matematického kyvadla môžeme teda

použiť upravený vzťah (10.8)

$$T_0 = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{m\,g/L}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{L}{g}}\ . \qquad (10.13)$$

Analýzou uhlovej výchylky θ z rovnovážnej polohy (obr. 10.4) (prípadne okamžitej výchylky v smere osi x) sa možno dopracovať jednak k uhlovej frekvencii kyvadla a následne k perióde kmitov. Daný priebeh môžeme popísať rovnicou $\theta(t) = 0,111\,\cos(1,827\,t + 6,27)$ (prípadne pre okamžitú výchylku vo zvislom smere bude platiť $x(t) = 0,33\,\cos(1,827\,t + 6,27)$), z čoho vyplýva, že uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega_0 = 1,827\ rad/s$ a fázová konštanta kmitavého pohybu je $\varphi = 6,27\,rad$. Z hodnoty uhlovej frekvencie kmitavého pohybu kyvadla môžeme určiť periódu kmitavého pohybu, ktorá je $T_0 = 3,44\,s$. (Tú môžeme odhadnúť aj z grafu (obr. 10.4), keď dokážeme odčítať čas desiatich kmitov.) Odtiaľ už nie je problémom určiť zo vzťahu (10.13) aj hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme, ktoré pri dĺžke daného kyvadla $L = 3\,m$ a z určených parametrov vychádza $g = 10,01\ m/s^2$.



Obrázok 10.4: Analýza uhlovej výchylky matematického kyvadla.

10.1.2 Premeny energie v mechanickom oscilátore

Aby sme mechanický oscilátor uviedli do kmitavého pohybu, musíme ho vychýliť z rovnovážnej polohy. Ak teleso uvoľníme, nadobudnutá potenciálna energia natiahnutej pružiny sa premení na kinetickú energiu kmitajúceho telesa. Po prechode rovnovážnou polohou teleso začne pružinu stláčať (prípadne naťahovať v závislosti od počiatočného vychýlenia) a kinetická energia pružiny sa mení na potenciálnu energiu stlačenej pružiny. Keď oscilátor dosiahne amplitúdu výchylky je potenciálna energia pružnosti oscilátora najväčšia. Potom sa oscilátor vracia späť do rovnovážnej polohy, jeho okamžitá výchylka sa zmenšuje, no na druhej strane sa zväčšuje rýchlosť závažia a jeho kinetická energia E_k je pri prechode rovnovážnou polohou najväčšia a rovná potenciálnej energii pri najväčšej výchylke z rovnovážnej polohy. Po prechode rovnovážnou polohou sa rýchlosť oscilátora bude opäť zmenšovať, pružina oscilátora sa naťahuje a zväčšuje sa jeho potenciálna energia. Keď oscilátor dosiahne amplitúdu výchylky, bude rýchlosť závažia, a teda aj kinetická energia opäť nulová. Pri harmonickom pohybe sa periodicky premieňa potenciálna energia oscilátora na kinetickú a naopak. Celková mechanická energia oscilátora je pritom konštantná a v každom okamihu sa rovná súčtu potenciálnej a kinetickej energie.

Ak budeme uvažovať o netlmenom harmonickom pohybe, celková mechanická energia v izolovanej sústave, v ktorej pôsobí iba konzervatívna sila, je konštantná a je rovná súčtu kinetickej a potenciálnej energie. V miestach s maximálnou výchylkou je rýchlosť oscilátora nulová (kinetická energia je taktiež nulová) a celková mechanická energia je rovná potenciálnej energii, pre ktorú platí:

$$E = E_{p\,max} = \int_{x_m}^{0} -k\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,k\,x_m^2\,. \tag{10.14}$$

Rovnakú hodnotu celkovej energie dostaneme, keď budeme analyzovať kinetickú energiu, ktorá dosahuje maximálne hodnoty pri prechode oscilátora rovnovážnou polohou, pričom potenciálna energia je nulová. Po dosadení maximálnej hodnoty rýchlosti zo vzťahu (10.10) do vzťahu pre kinetickú energiu dostaneme

$$E = E_{k\,max} = \frac{1}{2}\,m\,v_{max}^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,x_m^2 = \frac{1}{2}\,k\,x_m^2\,. \tag{10.15}$$

Pre okamžité hodnoty kinetickej a potenciálnej energie platí

$$E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x_m^2\, \sin^2(\omega_0\, t + \varphi)\ , \tag{10.16}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, x_m^2 \cos^2(\omega_0\, t + \varphi) = \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x_m^2 \cos^2(\omega_0\, t + \varphi)\ . \tag{10.17}$$

Možno sa presvedčiť, že súčet okamžitých hodnôt kinetickej a potenciálnej energie harmonického oscilátora nezávisí od času.

$$\begin{aligned} E_{celk} &= E_k + E_p = \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x_m^2 \left(\sin^2(\omega_0\, t + \varphi) + \cos^2(\omega_0\, t + \varphi)\right) \\ &= \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x_m^2 = \frac{1}{2}\, k\, x_m^2\ , \end{aligned} \tag{10.18}$$

pričom sme využili, že pre každý uhol α platí

$$\cos^2\ \alpha + \sin^2\ \alpha = 1\ .$$

Ako z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, celková mechanická energia netlmeného harmonického oscilátora je konštantná a priamoúmerná tuhosti pružiny a štvorcu amplitúdy kmitov.

10.2 Tlmený harmonický oscilátor a tlmené kmitanie

Predchádzajúce úvahy boli robené za predpokladu, že v priebehu harmonického kmitania nepôsobia na oscilátor žiadne iné vplyvy. Za daného ideálneho predpokladu by sa amplitúda výchylky nemenila a oscilátor by kmital neobmedzene dlho. V skutočnosti však na oscilátor pôsobia sily, ktoré sú príčinou premeny mechanickej energie na inú formu energie, zväčša na jeho vnútornú energiu. To sa prejaví postupným zmenšovaním amplitúdy výchylky, až postupne kmitanie zanikne. Tomuto procesu hovoríme **tlmené kmitanie**.

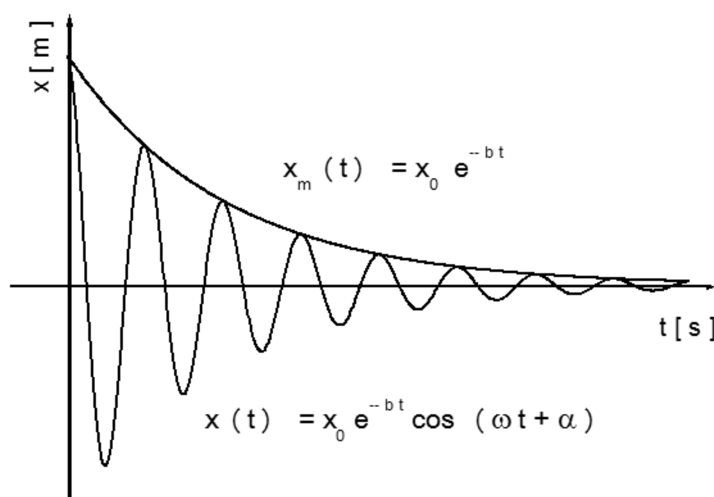
Príčinou tlmeného kmitania oscilátora je najčastejšie trecia sila, ktorá vzniká vzájomným pôsobením oscilátora a prostredia, v ktorom sa oscilátor pohybuje. Ak je tlmenie oscilátora príliš veľké, kmitanie nenastane a oscilátor sa po vychýlení vráti do rovnovážnej polohy (aperiodický pohyb).

V praxi, keď sa vyžaduje malé tlmenia, príčiny tlmenia sa obmedzujú, a naopak, tam, kde je kmitanie nežiaduce, tlmenie sa umelo zväčšuje (napr. tlmiče perovania v automobiloch, tlmenie pohybu ručičiek meracích prístrojov a pod.).

Vlastné kmitanie oscilátora je vždy tlmené. Časový priebeh tlmenia závisí jednak od vlastností oscilátora, ale aj od prostredia, v ktorom sa kmitanie uskutočňuje. Tlmenie ovplyvňuje amplitúdu výchylky aj periódu kmitania. Tlmený oscilátor má väčšiu periódu kmitania ako rovnaký oscilátor bez tlmenia.

Experimentálne môžeme tlmený kmitavý pohyb realizovať napríklad ponorením kmitajúcej sústavy - harmonického oscilátora do viskóznej kvapaliny (prípadne nechať oscilátor kmitať dostatočne dlho na vzduchu). Predpokladajme pri danom pohybe, že odpor prostredia je priamoúmerný rýchlosti $F_{odp} = -k' v$, kde $k' > 0$. Sila odporu prostredia bude smerovať proti smeru rýchlosti, čo vyjadruje znamienko mínus v pohybovej rovnici

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x - k' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ . \tag{10.19}$$



Obrázok 10.5: Tlmené harmonické kmity.

Ak použijeme substitúciu (vzťah (10.7))

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{a} \qquad \frac{k'}{m} = 2\,b\ ,$$

pohybová rovnica prejde na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\,b\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = 0\ . \tag{10.20}$$

Konštantu $b = \frac{k'}{2\,m}$ charakterizuje vplyv trenia a nazýva sa **koeficient útlmu**, ω_0 je vlastná uhlová frekvencia, t. j. uhlová frekvencia netlmeného harmonického oscilátora. Všeobecné riešenie predchádzajúcej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0\, e^{-b\,t} \cos\left(\omega\, t + \varphi\right) \ . \tag{10.21}$$

Uhlová frekvencia ω je menšia, ako uhlová frekvencia pri netlmenom kmitaní ω_0 tej istej sústavy a mení sa aj amplitúda, ktorá s časom exponenciálne klesá:

$$x_m = x_0\, e^{-b\,t} \ . \tag{10.22}$$

Priebeh kmitania a zmeny amplitúdy je znázornený na obrázku 10.5.

Prísne vzaté, nemôžeme tlmený kmitavý pohyb pokladať za periodický pohyb, pretože kmitajúci bod nedosiahne svoju pôvodnú výchylku. Pohyb je kváziperiodický a o perióde T môžeme hovoriť iba ako o časovom intervale, za ktorý hmotný bod prechádza rovnovážnou polohou.

Pre periódu tlmených kmitov platí

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \ , \tag{10.23}$$

pričom $T > T_0$, kde T_0 predstavuje periódu vlastných kmitov. Ak je tlmenie malé, perióda kmitavého pohybu sa takmer rovná perióde netlmených kmitov a predchádzajúci vzťah sa zmení na vzťah (10.8). Pri zväčšovaní tlmenia bude aj perióda tlmených kmitov narastať. Pre mechanickú energiu tlmeného oscilátora bude platiť, že sa s časom zmenšuje. Pre slabé tlmenie môžeme amplitúdu x_m v rovnici (10.18) nahradiť výrazom (10.22) a získame tak závislosť

$$E(t) \approx \frac{1}{2}\, k\, x_0^2\, \exp(-2\, b\, t) \ . \tag{10.24}$$

Podiel amplitúdy dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek na tú istú stranu nazývame **útlm** a označujeme λ, pričom platí

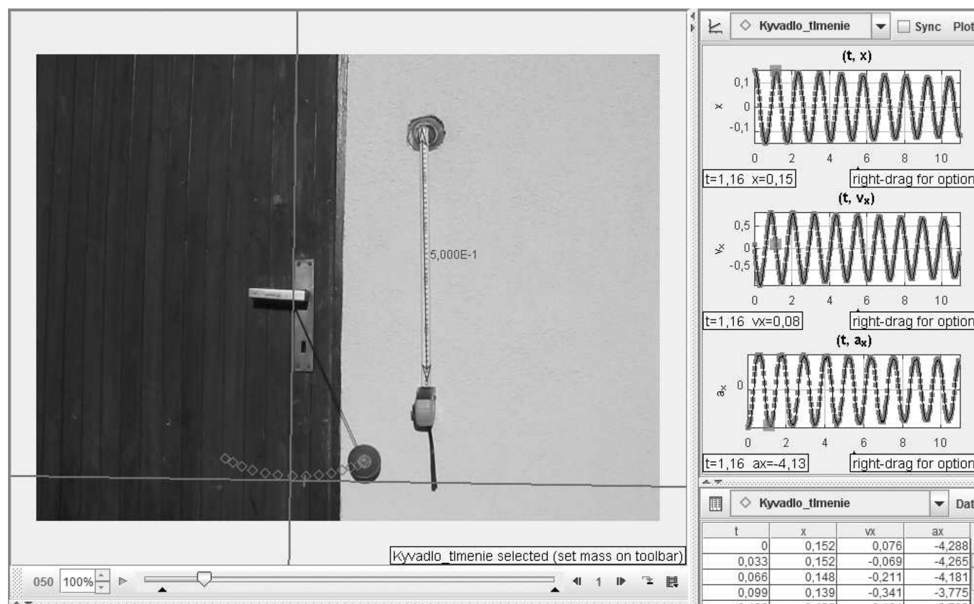
$$\lambda = \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = \frac{x_0\, e^{-b\,t}}{x_0\, e^{-b\,(t+T)}} = e^{b\,T} \ . \tag{10.25}$$

Prirodzený logaritmus útlmu je **logaritmický dekrement útlmu** δ a využijúc predchádzajúcu rovnicu môžeme písať

$$\delta = \ln \lambda = b\, T \ . \tag{10.26}$$

Čím väčší je logaritmický koeficient útlmu, tým je potrebný menší počet kmitov na určité zníženie amplitúdy.

Na obrázku 10.6 je vykonaná analýza tlmených harmonických kmitov kyvadla - loptičky zavesenej na vlákne. Ako aj v predchádzajúcom prípade netlmeného pružinového oscilátora, aj v tomto prípade si môžeme všimnúť fázový posun medzi okamžitou výchylkou, rýchlosťou a zrýchlením kyvadla v danom čase.

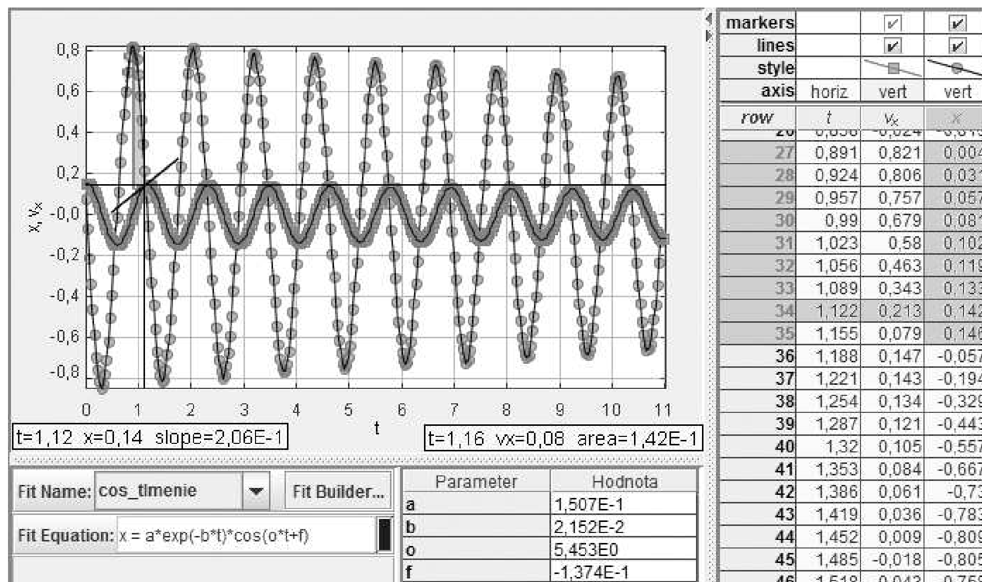


Obrázok 10.6: Analýza tlmených kmitov harmonického pohybu kyvadla.

Analýzou časových závislosti možno usúdiť (obr. 10.7), že ide o tlmený harmonický pohyb, keďže amplitúda okamžitej výchylky a rýchlosti sa s časom znižuje.

Okamžitú výchylku tlmeného kmitavý pohyb možno popísať rovnicou $x(t) = 0,15\ \exp\left(-0,0215\, t\right) \cos\left(5,453\, t - 0,137\right)$. Smernica dotyčnice ku grafu okamžitej výchylky má v čase $t = 1,12\, s$ hodnotu $0,206\ m/s$. To zodpovedá okamžitej rýchlosti v smere osi x určenej z tabuľky: $v_x(t = 1,122\, s) = 0,21\ m/s$. Analýza rýchlosti tlmeného harmonického oscilátora je v tomto prípade trochu zložitejšia, nakoľko rýchlosť tlmeného kmitavého pohybu dostaneme, keď zderivujeme výchylku kyvadla podľa času, ktorá v tomto prípade predstavuje zloženú funkciu (exp() cos()). Takže danú matematickú funkciu musíme derivo-

vať ako súčin. (Samotnú deriváciu ponechávame na čitateľovi.) Po zderivovaní výchylky ($x(t)$) tlmeného harmonického pohybu kyvadla v smere osi x dostávame $v_x(t) = 0,15\ (-0,0215)\ \exp\ (-0,0215\,t)\ \cos(5,45\,t - 0,131) - 0,15\ \exp\,(-0,0215\,t) 5,45\ \sin\,(5,45\,t{-}0,131)$. (Vyjadrenie zrýchlenia ponechávame na samotnom čitateľovi, nakoľko ide o dvojnásobnú deriváciu súčinu.)



Obrázok 10.7: Grafy závislosti okamžitej výchylky tlmených harmonických kmitov kyvadla (štvorčeky) a okamžitej rýchlosti tlmených harmonických kmitov kyvadla (guľôčky) a analýza okamžitej výchylky kmitov.

Zo získaných vzťahov pre výchylku a rýchlosť kmitavého pohybu vyplýva, že amplitúda kmitov je $x_m = 0,15\,m$, uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega = 5,45\ rad\,s^{-1}$, koeficient útlmu $b = 0,0215\,s^{-1}$ a fázová konštanta kmitavého pohybu je $\varphi \approx -0,14(-0,13)\,rad$.

Aj pri tomto pohybe je možné v ktoromkoľvek okamihu určiť výchylku v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti od času (obr. 10.7 - obsah vyznačenej plochy je $0,142\,m$, čo zodpovedá zmene okamžitej výchylky vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{35} {-} t_{27} = 1,155\,s - 0,891\,s = 0,264\,s$: $\Delta x = x_{35} - x_{27} = 0,146\,m - 0,004\,m = 0,142\,m$).

Vplyvom trenia pri kmitavom pohybe bude dochádzať k stratám mechanickej energie, ktorá sa mení na energiu tepelnú a pohyb bude postupne zanikať. Ak chceme v kmitajúcej sústave pohyb udržať, musíme sústave vhodným

spôsobom dodávať energiu. Za istých podmienok je možné dosiahnuť, aby výchylky oscilátora boli väčšie, ako samotná počiatočná amplitúda kmitavého pohybu.

10.3 Vynútený kmitavý pohyb

V každom kmitajúcom systéme pôsobia určité trecie sily a voľné kmity vyvolané v takomto systéme budú vždy tlmené. Aby sme v systéme dosiahli netlmené kmity, je potrebné kompenzovať energetické straty vyvolané trením pomocou vonkajšieho zdroja. Pod vynúteným kmitavým pohybom budeme rozumieť taký pohyb, ktorý nastane, keď na kmitajúcu sústavu bude okrem sily veľkosti $k\,x$ a odporovej sily prostredia $b\,v$ pôsobiť aj periodická sila. Môžeme si predstaviť napríklad dieťa na hojdačke, ktoré sa snaží hojdať jeho rodič stojaci pred (za) ním periodickým dodávaním energie. Ak by rodič postrkával hojdačku s frekvenciou rovnou vlastnej frekvencii hojdačky, dosiahol by tak veľké amplitúdy výchylky aj rýchlosti. Ako možno zo skúsenosti vieme, je možné naučiť sa takto rozhojdať hojdačku metódou pokus-omyl. Ak by sme ju rozhojdávali s inou frekvenciou, buď vyššou alebo nižšou, amplitúdy výchylky a rýchlosti by boli malé. Ak by hojdačku nerozhojdával rodič, ale dieťa by sa hojdalo samé, pričom by sa udržiavalo stále kmitanie pravidelne sa meniacim vnútorným parametrom - napr. kývaním nôh, vtedy hovoríme o tzv. **parametrickej rezonancii**. Rezonančná frekvencia takéhoto mechanizmu hojdania sa je dvojnásobná oproti vlastnej frekvencii hojdačky. Ďalšou zvláštnosťou parametrickej rezonancie oproti vynúteným kmitom je to, že ňou možno zosilniť už existujúce kmity, ale nemožno sa ňou rozhojdať z úplného pokoja.

Uvažujme teraz o tom, že časová závislosť vynucujúcej sily má tvar $F_v = F_0\,\cos(\Omega\,t)$, kde F_0 je amplitúda pôsobiacej sily a Ω je jej kruhová frekvencia. Pod vplyvom takejto sily vzniknú v systéme kmity, ktoré nazývame **vynútené**. Výslednicu síl pôsobiacich na teleso hmotnosti m môžeme zapísať v tvare

$$F = -k\,x - k'\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\,\cos(\Omega\,t)\;. \qquad (10.27)$$

Pohybová rovnica má pre vynútený kmitavý pohyb tvar

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x - k'\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\cos(\Omega\,t)\;, \qquad (10.28)$$

čo môžeme s využitím substitúcie prepísať do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\,b\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = f_0\,\cos\left(\Omega\,t\right)\,, \tag{10.29}$$

kde $f_0 = F_0/m$ a b a ω_0 majú ten istý význam, ako pri tlmenom kmitavom pohybe. Od predchádzajúcich pohybových rovníc sa táto rovnica líši tým, že jej pravá strana sa nerovná nule a v matematike ju poznáme pod pojmom diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami a pravou stranou. Všeobecné riešenie danej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0\,e^{-b\,t}\,\cos\left(\omega\,t + \varphi\right) + B\,\cos\left(\Omega\,t + \alpha\right)\,. \tag{10.30}$$

Z rovnice vyplýva, že ak vonkajšia periodická sila bude pôsobiť na teleso dostatočne dlhý čas, sústava bude konať len vynútené harmonické kmity s amplitúdou B a frekvenciou rovnajúcou sa frekvencii vynucujúcej sily, pričom fáza vynútených kmitov bude posunutá o uhol α vzhľadom na vonkajšiu pôsobiacu silu, keďže prvý člen rovnice exponenciálne zaniká. V ustálenom stave je riešenie kmitajúceho systému s vonkajšou silou $F_v = F_0 \cos\left(\Omega\,t\right)$ dané vzťahom

$$x = B\,\cos\left(\Omega\,t + \alpha\right)\,. \tag{10.31}$$

Pre amplitúdu vynútených kmitov platí

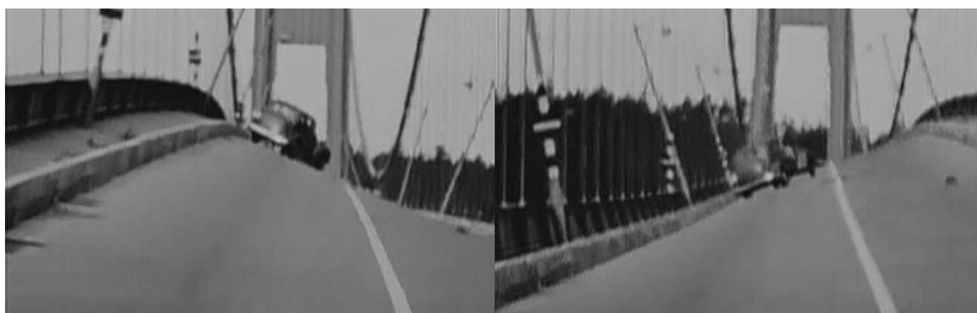
$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\,b^2\,\Omega^2}}\,. \tag{10.32}$$

Ako z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, amplitúda vynútených kmitov bude závisieť od amplitúdy vynucujúcej sily F_0, ale aj od vzťahu medzi vlastnou frekvenciou kmitajúceho systému ω_0 a vynucujúcou frekvenciou Ω. Najväčšia hodnota amplitúdy B sa dosiahne, keď sa obe frekvencie budú rovnať, t. j. $\omega_0 = \Omega$. Daný jav sa nazýva **rezonancia**. Kmity s maximálnou amplitúdou sa nazývajú **rezonančné kmity** a frekvencia, pri ktorej dochádza k takýmto kmitom sa nazýva **rezonančná frekvencia amplitúdy**. Rezonančnú frekvenciu je možné určiť z podmienky extrému funkcie $B(\Omega)$. Ako si môžeme všimnúť, rezonančná frekvencia nezávisí od veľkosti tlmenia. Maximálna hodnota amplitúdy B je vyjadrená

$$B = \frac{F_0}{2\,m\,b\,\Omega}\,. \tag{10.33}$$

Všetky mechanické sústavy vykazujú jednu alebo viacero vlastných frekvencií. Keď na ne bude pôsobiť veľká vonkajšia sila s frekvenciou blízkou jednej z vlastných frekvencií sústavy, môžu vznikajúce vynútené kmity spôsobiť mechanické porušenie. Mechanické rezonancie môžu mať veľké negatívne účinky. Už pôsobením malej sily môže dôjsť k veľkým amplitúdam kmitov, pričom sa môže porušiť pevnosť materiálov, mostov, čo môže spôsobiť ich deštrukciu (obr. 10.8). Preto musia aj leteckí konštruktéri zaistiť, aby sa vlastná frekvencia krídel líšila od frekvencie piestov pri otáčkach motora počas letu.

V roku 1940 postavili v štáte Washington visutý most cez Tacomskú úžinu, ktorý otvorili 1.7. Vietor, ktorý sa opieral do mosta, spôsoboval nekontrolovateľné vlnenie vozovky. 7.11. dosiahla sila vetra rýchlosť 70 km/hod a to spôsobilo také silné krútenie mosta, že to most nevydržal a zrútil sa do rieky.



Obrázok 10.8: Most Tacoma Narrows Bridge v krátkych okamihoch za sebou počas fúkania vetra a silného krútenia mosta.

10.4 Skladanie kmitov

Výsledný kmitavý pohyb môže byť niekedy vytvorený zložením rôznych pohybov v rôznych smeroch. V závere tejto časti si popíšeme dva špeciálne prípady z množstva pohybov - rovnobežné a kolmé kmity.

Skladanie rovnobežných kmitov

Rovnobežné kmity vznikajú zložením dvoch kmitov rovnakej amplitúdy, ale rôznej (pritom blízkej) frekvencie, ak sa pohyb uskutočňuje v rovnakom smere. Pre jednoduchosť budeme uvažovať kmitavé pohyby s rovnakými amplitúdami x_0 a fázovými konštantami pohybu φ, pričom uhlová frekvencia prvého kmi-

tania je ω_1 a druhého ω_2. Potom pre okamžité výchylky z rovnovážnych polôh pohybov platí:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) \ , \tag{10.34}$$

$$x_2 = x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) \ . \tag{10.35}$$

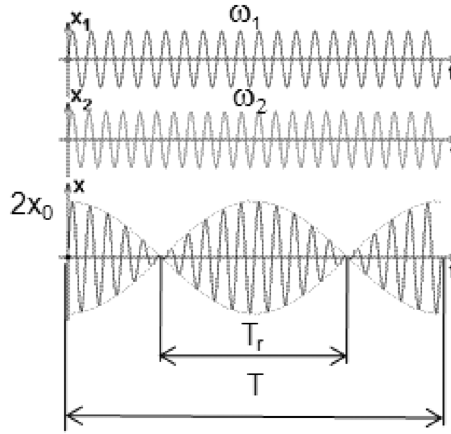
Využitím vlastností goniometrických funkcií pre výchylku výsledného pohybu x zloženého z dvoch kmitavých pohybov x_1 a x_2 ($x = x_1 + x_2$) dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) + x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ &= 2\, x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t + \varphi\right) \ , \end{aligned} \tag{10.36}$$

pričom sme využili známy vzťah z trigonometrie

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \ .$$

Prvá časť výsledného vzťahu (10.36) sa mení oveľa pomalšie a charakterizuje amplitúdu pohybu a druhá časť predstavuje fázu pohybu. Preto výsledný pohyb môžeme chápať ako kmitanie s uhlovou frekvenciou $(\omega_1 + \omega_2)/2$ a pomaly sa meniacou amplitúdou. Priebeh kmitania je znázornený na obrázku 10.9.



Obrázok 10.9: Vznik rázov.

Výsledná amplitúda kmitavého pohybu je kladné číslo a platí pre ňu

$$A(t) = \left| 2\, x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \right| . \tag{10.37}$$

Uhlová frekvencia výsledného pohybu bude mať tvar

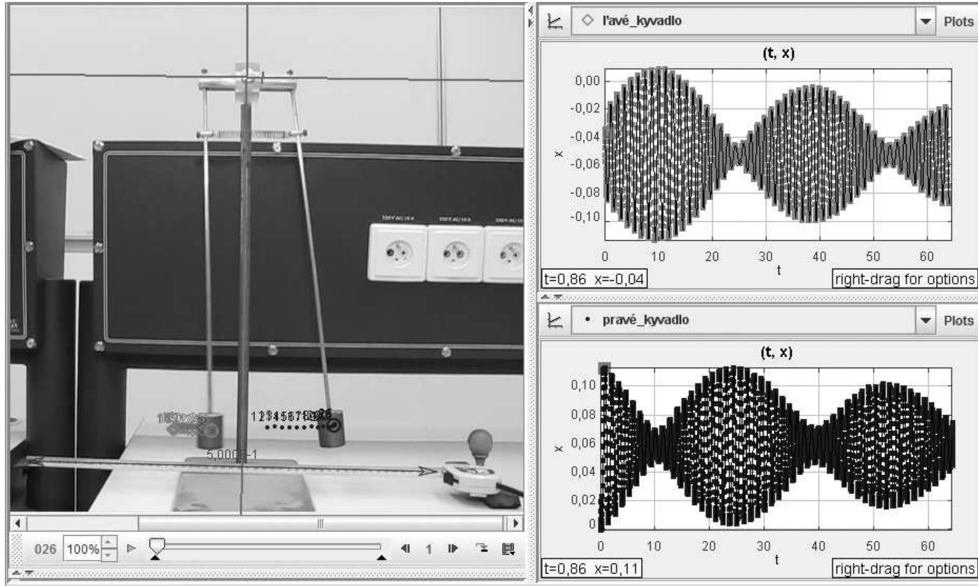
$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\frac{2\,\pi}{T_1} + \frac{2\,\pi}{T_2}}{2} = \frac{\pi\;(T_1 + T_2)}{T_1\,T_2}\;. \tag{10.38}$$

Pre periódu výsledného pohybu môžeme teda písať:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}} = \frac{4\,\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2\,T_1\,T_2}{T_1 + T_2}\;. \tag{10.39}$$

Amplitúda výsledného pohybu (10.37) sa s časom mení periodicky, pričom platí

$$T_A = \frac{2\,\pi}{\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}} = \frac{4\,\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}\;. \tag{10.40}$$



Obrázok 10.10: Analýza kmitov spriahnutých kyvadiel a vznik rázov.

Keďže za jednu periódu zmeny amplitúdy vzniknú dve zosilnenia a dve zoslabenia, t. j. **rázy**, pre periódu rázov platí:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{f_r} = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{T_A}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{2\pi}{2\pi\,(|f_1 - f_2|)} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \\ &= = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right|} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}\;. \end{aligned} \tag{10.41}$$

Pre výslednú frekvenciu rázov môžeme teda písať:

$$f_r = |f_2 - f_1|\;. \tag{10.42}$$

Skladanie kolmých kmitov

Budeme uvažovať hmotný bod, ktorý môže vykonávať kmitavé pohyby na osi x a osi y. Pohyb začneme skúmať v čase, kedy fázová konštanta prvého z pohybov je nulová a budeme pre jednoduchosť uvažovať skladanie kolmých kmitov rovnakej frekvencie, rôznej amplitúdy a fázy. Pre jednotlivé kmity platí:

$$x = A\cos\omega t\ ,\ y = B\cos(\omega t + \varphi)\ . \tag{10.43}$$

Využitím súčtových vzorcov pre funkciu $\cos(\omega t + \varphi)$ a elementárnych matematických úprav pre súčet kolmých kmitov $x + y$ dostaneme

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2\,x\,y}{A\,B}\cos\varphi = \sin^2\varphi\ . \tag{10.44}$$

Daná rovnica predstavuje všeobecný tvar rovnice elipsy, ktorj vlastnosti určuje fázový posun φ. Podľa toho, akú má hodnotu, vznikajú niektoré špeciálne prípady:

a) Ak fázový rozdiel bude $\varphi = 0$, potom trajektória je rovnicou priamky.

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \implies y = \frac{B}{A}\,x\ . \tag{10.45}$$

Kmitajúci bod sa bude pohybovať po úsečke prechádzajúcej počiatkom súradníc vo vzdialenosti od počiatku

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\omega t\ . \tag{10.46}$$

b) Ak fázový rozdiel bude $\varphi = \pm\,\pi$, rovnica 10.44 bude mať tvar

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \implies y = -\frac{B}{A}\,x\ , \tag{10.47}$$

a pohyb sa bude uskutočňovať opäť po priamke zobrazenej na obr. 10.11.

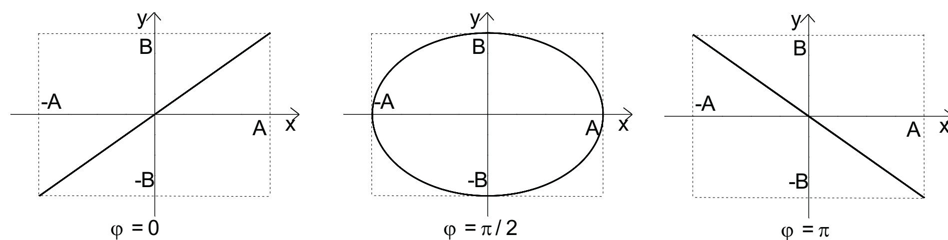
c) Ak bude fázový rozdiel je $\varphi = \pm\,\pi/2$, rovnica 10.44 bude popisovať elipsu, ktorej polosi majú veľkosti A a B (obr. 10.11).

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\ . \tag{10.48}$$

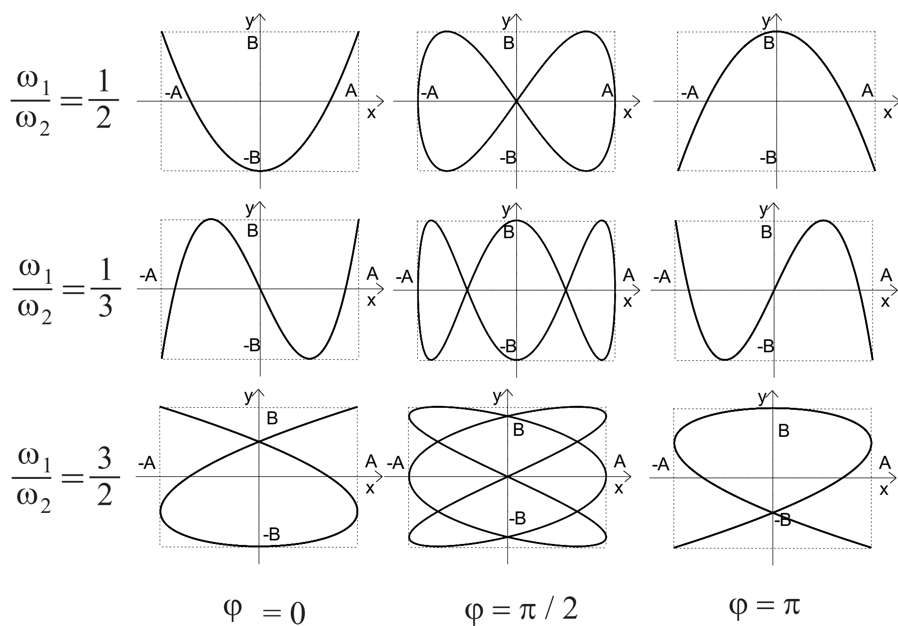
Ak $\varphi = +\pi/2$ $(-\pi/2)$, pohyb sa bude uskutočňovať v smere (proti smeru) pohybu hodinových ručičiek. Pri rovnosti $A = B$ prejde elipsa na kružnicu.

Ak frekvencie ω skladaných kolmých kmitov nebudú rovnaké a pomer frekvencií ω_1, ω_2 sa dá vyjadriť ako podiel prirodzených čísel $(1:2, 1:3, 2:3)$,

pre rôzne hodnoty fázového rozdielu $(0, \pi/2, \pi)$ sa výsledný pohyb bude uskutočňovať po krivkách, ktoré nazývame **Lissajousove krivky**. Príklady Lissajousových kriviek sú na obrázku 10.12.



Obrázok 10.11: Lissajousove krivky pri rovnakej uhlovej frekvencii.



Obrázok 10.12: Lissajousove krivky pri vhodných pomeroch uhlových frekvencií.

11 Základy termiky a termodynamika

11.1 Tepelný pohyb v látkach

Pohyb častíc v látke sa dá popísať tromi experimentálne overenými poznatkami:

- Látky ktoréhokoľvek skupenstva sa skladajú z častíc.
- Častice sa v látkach neustále neusporiadane pohybujú.
- Častice na seba navzájom pôsobia silami. Tieto sily sú pri malých vzdialenostiach odpudivé, pri väčších vzdialenostiach príťažlivé.

Medzi častice zaraďujeme atómy, molekuly alebo ióny. Rozmery častíc sú rádove $10^{-10}\,m = 0,1\,nm$. V $1\,m^3$ vzduchu je napr. za normálneho tlaku asi 30×10^{15} molekúl. Objemy týchto častíc i ich vzájomné vzdialenosti sú rôzne. V atmosfére pri povrchu Zeme je vo vzduchu 99 % priestoru bez molekúl a len 1 % zaujímajú molekuly plynu, z ktorých je vzduch zložený.

Častice môžu vykonávať posuvný pohyb (napr. v plyne), otáčavý (napr. viacatómové molekuly plynu) a kmitavý pohyb (napr. v pevných latkách alebo kvapalinách). Pri telesách, ktoré sú v pokoji, neprevláda v danom okamihu žiadny smer, v ktorom by sa pohybovala väčšina častíc. Neustály a neusporiadaný pohyb častíc v latkách sa nazýva **tepelný pohyb.** Dôkazy o tepelnom pohybe môžeme pozorovať ako difúziu (difúzia je samovoľné prenikanie častíc jednej látky medzi častice druhej látky rovnakého skupenstva,), tlak plynu alebo **Brownov** [1] **pohyb** (Častice vykonávajú trhavý, úplne nepravidelný pohyb,

[1] ROBERT BROWN (1773 – 1858) bol škótsky botanik. Priekopníckym používaním mikroskopu prispel k viacerým objavom v oblasti biológie. Medzi jeho najznámejšie prínosy

ktorý je spôsobený pôsobením ostatných častíc, molekúl, ktoré zo všetkých strán narážajú do seba. Smer pohybu častíc sa veľmi rýchlo mení (rádove 10^{12} krát za sekundu)). Tlak plynu je vyvolaný nárazmi molekúl dopadajúcich na steny nádoby s plynom. Pri vyššej teplote sa molekuly pohybujú rýchlejšie a preto tlak plynu rastie s teplotou.

Častice sú zložité objekty mikrosveta a nedá sa preto medzi nimi merať veľkosť síl. Preto si musíme situáciu vhodne zjednodušiť. Zameriame sa len na vzájomné pôsobenie medzi dvoma atómami, ktorých kladne nabité jadrá sú obklopené záporne nabitými elektrónmi. Pri vzájomnom približovaní oboch atómov pôsobia medzi sebou elektrónové obaly a kladne nabité jadrá oboch atómov. Z teoretických úvah vyplýva, že výsledkom vzájomného pôsobenia je vznik príťažlivej a odpudivej elektrickej sily. Pri veľkom približovaní začne prevládať sila brániaca ďalšiemu približovaniu, naopak pri vzďaľovaní registrujeme príťažlivú silu. Existuje určitý rovnovážny stav, kedy sa tieto sily vykompenzujú.

Základné veličiny popisujúce častice

Jedným z prvých poznatkov o stavbe látky bolo zistenie **relatívnej atómovej hmotnosti** A_r. Vedci vedeli, že napr. atóm kyslíku je približne 16−krát a atóm uhlíku zhruba 12−krát ťažší ako atóm vodíka. Relatívnu atómovú hmotnosť definujeme vzťahom

$$A_r = \frac{m_A}{m_u} \, , \tag{11.1}$$

kde m_A je hmotnosť atómu a m_u je **atómová hmotnostná konštanta.** Táto konštanta je rovná 1/12 atómovej hmotnosti nuklidu uhlíka $^{12}_{6}C$ ($m_u = 1,660 \times 10^{-27}\, kg$, tab. 1.4). Pri molekulách zavádzame **relatívnu molekulovú hmotnosť** vzťahom: $M_r = m_M/m_u$, kde m_M je hmotnosť molekuly. Relatívna molekulová hmotnosť molekuly je rovná súčtu relatívnych atómových hmotností všetkých atómov, ktoré tvoria molekulu.

Zo vzťahu pre relatívnu atómovú hmotnosť vyplýva, že relatívna atómová hmotnosť nuklidu uhlíka $^{12}_{6}C$ je rovná 12. Preto hmotnosť tohoto atómu je $12\, m_u$. Využime tento poznatok na to, aby sme vypočítali počet atómov nuk-

patrí objav cytoplazmatického prúdenia a bunkového jadra. Bol prvý, kto spozoroval chaotický pohyb častíc a vydal prvotné práce o opeľovaní, oplodňovaní.

lidu $^{12}_{6}C$, ktoré tvoria vzorku s hmotnosťou $0,012\,kg$:

$$N = \frac{0,012\,\mathrm{kg}}{12\,m_u} = 6,022045 \times 10^{23} = N_A\ . \tag{11.2}$$

Teda vo vzorke nuklidu uhlíka $^{12}_{6}C$ s hmotnosťou $0,012\,kg$ je približne $6,022045\times 10^{23}$ atómov. **Sústava, ktorá obsahuje práve toľko častíc (napr. atómov, molekúl), koľko je atómov vo vzorke nuklidu uhlíka $^{12}_{6}C$ s hmotnosťou $0,012\,kg$, má látkové množstvo $1\,mol$.** Takto definovaná fyzikálna konštanta sa volá **Avogadrova**[2] **konštanta** a jej hodnota je $N_A = 6,022045\times 10^{23}\,mol^{-1}$. Pomocou Avogadrovej konštanty a Boltzmannovej[3] konštanty ($k = 1,38 \times 10^{-23}\ J/K$) si môžeme vyjadriť aj **plynovú konštantu** ako

$$R = N_A\, k = 8,31\, J.mol^{-1}.K^{-1}. \tag{11.3}$$

Ak je v danom telese z rovnakej látky N častíc, potom **látkové množstvo** n daného telesa určíme zo vzťahu

$$n = \frac{N}{N_A}\ . \tag{11.4}$$

Veličiny, ktoré sa vzťahujú na látkové množstvo $1\,mol$, nazývame molárne veličiny. Medzi najčastejšie používané patrí molárna hmotnosť a molárny objem. **Molárnu hmotnosť** definujeme vzťahom

$$M_m = \frac{m}{n}\ , \tag{11.5}$$

kde m je hmotnosť látky a n zodpovedajúce látkové množstvo. Jednotkou molárnej hmotnosti je (kg/mol).

11.2 Teplota a jej meranie

Teplota je fyzikálna veličina, ktorá je prístupná našim zmyslom. Teplota látok vytvára v ľudskom organizme subjektívne pocity, ktoré sú závislé od tepelnej vodivosti látok, a taktiež od stavu detektora, ktorým býva najčastejšie

[2]LORENZO AVOGADRO (1776 – 1856) bol taliansky fyzik a chemik. Študoval okrem iného správanie plynov, pár a mernú tepelnú kapacitu plynov, kvapalín a pevných telies.

[3]LUDWIG BOLTZMANN (1844 – 1906) bol rakúsky fyzik, zakladateľ štatistickej fyziky. Sformuloval Boltzmannovo rozdelenie, ktoré umožňuje spočítať rozdelenie molekúl plynu, ktoré sa stalo dôležitou súčasťou termodynamických výpočtov. Ako prvý použil štatistickú metódu pre opis tepelného žiarenia. Roku 1884 odvodil tzv. Stefanov-Boltzmannov zákon opisujúci časť tepelného spektra telies.

pokožka na rukách. Ako sme spomenuli v predchádzajúcej kapitole, molekuly látok sa nachádzajú v neustálom pohybe. Rýchlostiam molekúl zodpovedajú určité kinetické energie, ktorých priemerná hodnota v rovnovážnom stave je veličina konštantná. Táto priemerná hodnota neusporiadaného pohybu molekúl potom určuje aj teplotu látky.

Pomocou rovnovážneho stavu sústavy (veličiny charakterizujúce sústavu sú konštantné) definujeme fyzikálnu veličinu **teplota** a jej meranie. Uvažujme dve sústavy, ktoré sú v určitom rovnovážnom stave. Ak tieto dve sústavy spojíme a izolujeme od okolia, budú medzi sebou interagovať. Môžu nastať dva prípady. Buď sa ich rovnovážny stav nezmení, potom im priradíme rovnakú teplotu, alebo sa pôvodné rovnovážne stavy zmenia, teda mali na začiatku rôznu teplotu. Obe sústavy však po určitej dobe samovoľne prejdú do nového spoločného rovnovážneho stavu, ktorý je charakterizovaný rovnakou teplotou. Pod definíciu teploty rozumieme teda nasledujúce tvrdenie: Látkam, ktoré sú pri vzájomnom styku v rovnovážnom stave, priraďujeme rovnakú teplotu. Teplota sa udáva pomocou teplotnej stupnice. Aby teplotná stupnica bola jednoznačne definovaná, je potrebné určiť dva údaje - základný bod stupnice a jednotku teplotného rozdielu. Vo fyzike sa používajú viaceré teplotné stupnice. Prvou je absolútna Kelvinova stupnica, druhou je Celsiova[4] stupnica a treťou Fahrenheitova[5] stupnica.

Jednotkou teplotného rozdielu v absolútnej teplotnej stupnici je teplotný stupeň nazývaný **kelvin** (K). Jeden kelvin je definovaný ako $273,16$ diel teplotného rozdielu medzi absolútnou nulou a teplotou trojného bodu vody. Základným bodom tejto stupnice je trojný bod vody (Rovnovážny stav sústavy ľad+vody+nasýtená para, $0,01\,°C$.), ktorému zodpovedá teplota $273,16\,K$. Absolútna teplota sa v literatúre zvykne označovať T. Pri teplote $0\,K$ nadobúda kinetická energia častíc sústavy najnižšiu možnú hodnotu, ale nie je nulová. V blízkosti teploty $0\,K$ sa značne menia vlastnosti látok, napr. elektrická vodivosť. Najnižšie teploty, ktoré sa podarilo dosiahnuť sú menšie ako $1\,\mu K$.

[4]ANDRES CELSIUS (1701 − 1744) bol švédsky astronóm a fyzik, autor Celsiovej stupnice. Študoval polárnu žiaru. Ako prvý si všimol súvislosť medzi polárnou žiarou a poruchami magnetického poľa Zeme. Ako prvý tiež začal s meraniami relatívnych jasností hviezd.

[5]DANIEL GABRIEL FAHRENHEIT (1686 − 1736), holandský fyzik. V roku 1714 zostrojil svoj prvý ortuťový teplomer. Vyrábal rôzne teplomery, pričom používal niekoľko stupníc, z ktorých posledná je založená na troch základných stavoch: roztápajúci sa ľad so salmiakom, čistý topiaci sa ľad a teplota ľudského tela, pričom neskoršie bola pomenovaná jeho menom.

V dennej praxi používame na meranie teploty **Celsiovu teplotnú stupnicu**, ktorá má dve základné teploty. Jej prvým základným bodom je bod topenia ľadu pri normálnom tlaku $1,013 \times 10^5\,Pa$, ktorému dohodou priraďujeme teplotu $0\,°C = 273,15\,K$. Podobne rovnovážnemu stavu vody a pary za normálneho tlaku priraďujeme druhú teplotu $100\,°C$. Medzi týmito teplotami je stupnica rozdelená na 100 rovnakých dielikov. Jednotkou teplotného rozdielu je teplotný stupeň nazývaný **celsius** ($°C$) a je rovnako veľký, ako teplotný rozdiel zodpovedajúci jednému kelvinu. V súčasnej fyzike sa Celsiova teplota T v $°C$ definuje pomocou termodynamickej teploty T definičným vzťahom

$$T\,(°C) = T\,(K) - 273,15\ .$$

11.3 Teplotná rozťažnosť látok

Teplotná rozťažnosť sa prejavuje pri látkových telesách všetkých troch skupenstiev a je spôsobená tým, že parametre tepelného pohybu častíc látky závisia od teploty.

Častice tuhej látky kmitajú okolo rovnovážnych polôh v kryštalickej mriežke. Pri zväčšení teploty látky, zväčšuje sa energie kmitavého pohybu a súčasne narastá aj amplitúda kmitavého pohybu. Tým narastá i stredná vzdialenosť častíc. Zmena strednej vzdialenosti častíc so zmenou teploty je príčinou teplotnej rozťažnosti. Pri zmene teploty pevného telesa sa menia jeho rozmery. Tento jav nazývame **teplotná dĺžková rozťažnosť**. Uvažujme tyč, ktorá má dĺžku l_0 pri teplote T_0. Ak tyč zohrejeme o teplotu ΔT, je dĺžka sa zmení Δl čo sa dá vyjadriť vzťahom $\Delta l = \alpha\, l_0\, \Delta T$. Veličina α (K^{-1}), ktorá je konštantou úmernosti, sa nazýva **teplotný súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti**. Jej hodnota je rádove 10^{-5}. Ak označíme prírastok dĺžky $\Delta l = l - l_0$, kde l je dĺžka tyče pri teplote T potom môžeme vyjadriť dĺžku tyče l pri teplote T v tvare

$$l = l_0\,(1 + \alpha\,(T - T_0)\,)\ . \qquad (11.6)$$

Tento vzťah platí pre také teplotné rozdiely ΔT, pri ktorých je možné predpokladať, že v intervale teplôt ΔT, je zmena dĺžky telesa lineárna. Ukazuje sa, že pre väčšie teplotné rozdiely dĺžkovú rozťažnosť lepšie vyjadruje kvadratická závislosť.

Ak sa zvýši teplota telesa z tuhej látky pri stálom tlaku, zväčší sa jeho objem. Pokusy ukazujú, že vo vhodnom teplotnom intervale je zväčšenie objemu

$\Delta V = V - V_0$ priamoúmerné zväčšeniu teploty $\Delta T = T - T_0$ a objemu telesa V_0 pri teplote T_0, platí teda $\Delta V = \beta \, V \Delta T$. Po úprave dostaneme

$$V = V_0 \, (1 + \beta \, (T - T_0)) \ , \tag{11.7}$$

kde koeficient β sa nazýva **teplotný súčiniteľ objemovej rozťažnosti**. V prípade izotropného telesa sa dá tento koeficient zapísať ako: $\beta = 3 \, \alpha$.

Keďže so zmenou teploty dochádza k zmene objemu telies, musí sa meniť i ich hustota, nakoľko hmotnosť nepohybujúcich sa telies m je konštantná. Nech $\rho_0 = m/V_0$ je hustota telesa pri teplote T_0 a β je jeho teplotný súčiniteľ objemovej rozťažnosti. Jednoduchými úpravami a zanedbaním členov vyšších rádov zmeny teploty ΔT môžeme vzťah pre hustotu telesa ρ pri teplote T zapísať ako

$$\rho = \rho_0 \, (1 - \beta \, \Delta T) \ . \tag{11.8}$$

Väčšina látok má teplotný koeficient objemovej rozťažnosti kladný, takže s narastajúcou teplotou ich hustota klesá. Ale sú aj výnimky, napr. voda - anomália vody.

11.4 Teplo, tepelná kapacita

Teplo je forma prenosu energie. Podľa molekulárno-kinetickej teórie zodpovedá teplo celkovej kinetickej energii neusporiadaného pohybu molekúl. Podľa tejto teórie dochádza k premene mechanickej práce na teplo tak, že sa mení energia usporiadaného mechanického pohybu (napr. pohyb pri trení dvoch telies) na energiu neusporiadaného pohybu atómov alebo molekúl telies. Taktiež pri styku dvoch telies s rozdielnou teplotou sa kinetická energia molekúl teplejšieho telesa odovzdáva molekulám s nižšou kinetickou energiou chladnejšieho telesa, čo vnímame ako **prenos tepla.** Pri prenose tepla sa určuje množstvo tepelnej energie, ktoré je dodané, alebo odobraté určitému telesu. Toto množstvo tepelnej energie sa zvykne označovať Q. Uveďme si niekoľko príkladov. Predpokladajme, že máme nádobu, ktorú naplníme teplou vodou. Po čase zistíme, že nádoba aj naliata voda majú rovnakú teplotu a budú v tzv. rovnovážnom stave. Vložme do tejto sústavy nejaké teleso. Znova po určitom čase sa ich teploty vyrovnajú. Ak teraz nádobu s vodou a telesom postavíme na elektrickú platničku, bude sa sústava zohrievať ako celok. Vo všetkých prípadoch telesá odovzdali/prijali určité množstvo tepelnej energie. Z experimentálnych meraní vyplýva, že toto množstvo energie závisí od typu telesa,

od jeho hmotnosti a od rozdielu teplôt. Na základe experimentálnych meraní môžeme množstvo tepla, či už odovzdaného alebo prijatého, pri zmene teploty o hodnotu $\Delta\ T$ vyjadriť v tvare

$$\Delta Q = c\, m\, \Delta T\ , \tag{11.9}$$

kde c je **merná tepelná kapacita látky**, m je hmotnosť telesa a ΔT je teplotný rozdiel. Jednotkou tepla je jeden *joule*. Staršou technickou jednotkou pre množstvo tepla je kilokalória ($kcal$), ktorá predstavuje množstvo tepla potrebného na ohriatie $1\,kg$ čistej vody z $14,5\,°C$ na $15,5\,°C$. Jedna $kcal$ predstavuje asi $4,18\,kJ$.

Tabuľka 11.1: Merná tepelná kapacita vybraných látok

Látka	$c\,(J.kg^{-1}.K^{-1})$	Látka	$c\,(J.kg^{-1}.K^{-1})$
voda	4 186	ľad	2 100
glycelor	2 400	betón	880
petrolej	2100	oceľ	460
etán	2 400	meď	380
ortuť	140	olovo	130

Množstvo tepla potrebného na zvýšenie teploty látky teda závisí od hmotnosti látky, chemického zloženia, vnútornej štruktúry (stavby), ako to v roku 1760 zistil Joseph Black pri pokusoch s vodou a ortuťou. Množstvo tepla, ktoré musíme telesu dodať/odobrať, aby sme zvýšili/znížili jeho teplotu o jeden kelvin (jeden stupeň celzia), nazývame **tepelnou kapacitou** telesa C. Definujeme ju vzťahom

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\ . \tag{11.10}$$

Jednotkou tepelnej kapacity je (J/K). V bežnej praxi sa častejšie používa merná tepelná kapacita (11.9) definovaná ako

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\ , \tag{11.11}$$

kde m je hmotnosť telesa. **Merná tepelná kapacita udáva množstvo tepla, ktoré je potrebné na ohriatie jedného kilogramu látky o jeden teplotný stupeň.** Jednotkou mernej tepelné kapacity je ($J.kg^{-1}.K^{-1}$).

Ako už bolo povedané, merná tepelná kapacita je veličina charakteristická pre danú látku. Merná tepelná kapacita pevných a kvapalných látok je funkciou teploty. Pri plynoch je situácia zložitejšia. Merná tepelná kapacita závisí nielen

od teploty, ale tiež od tlaku a hlavne podmienok, počas ktorých plyn prijíma teplo. Podľa toho rozlišujeme **mernú tepelnú kapacitu za stáleho tlaku** c_p a **mernú tepelnú kapacitu za stáleho objemu** c_V.

Vzťah (11.9) je správny iba v tom prípade, ak c ostáva konštantné v teplotnom intervale ΔT. Z presných meraní sa však ukázalo, že merná tepelná kapacita všetkých látok mierne závisí od teploty. Ak je nutné pri výpočtoch uvažovať teplotnú závislosť mernej tepelnej kapacity látok, vzťah (11.9) prejde na tvar

$$\Delta Q = m \int c(T)\,\mathrm{d}T \,. \tag{11.12}$$

11.5 Kalorimetrická rovnica

Kalorimetria je veda, ktorá sa zaoberá meraním tepla pri chemických reakciách, alebo fyzikálnych zmenách látok. Tieto merania sa uskutočňujú v zariadení, ktoré sa nazýva **kalorimeter**. Kalorimeter je vlastne tepelne izolovaná nádoba, v ktorej je možné uskutočňovať tepelnú výmenu medzi telesami pri súčasnom meraní ich teplôt. Tepelné vlastnosti kalorimetra sa charakterizujú tepelnou kapacitou kalorimetra C_k.

Majme dve telesá s hmotnosťami m_1, m_2, s mernými tepelnými kapacitami c_1, c_2 a s teplotami T_1, T_2, pričom pre teploty platí, že $T_1 > T_2$. Ak tieto telesá privedieme do vzájomného kontaktu a predpokladáme, že daná sústava je tepelne izolovaná od okolia, nastane tepelná výmena medzi danými telesami. Teplo bude prechádzať z teplejšieho telesa na chladnejšie, pričom po určitej dobe sa ustáli ich teplota na rovnakej teplote T, pre ktorú platí $T_1 > T > T_2$.

Ak predpokladáme, že merné tepelné kapacity telies sú v uvažovanom teplotnom rozsahu konštantné, môžeme množstvo tepla (11.9), ktoré odovzdá teplejšie teleso chladnejšiemu vyjadriť v tvare: $\Delta Q_1 = c_1\, m_1(T_1 - T)$. Na druhej strane, chladnejšie teleso od teplejšieho prijme teplo, ktoré môžeme vyjadriť v tvare: $\Delta Q_2 = c_2\, m_2\,(T - T_2)$. Keďže telesá sú tepelne izolované od okolia, množstvo odovzdaného tepla telesom s hmotnosťou m_1 sa rovná množstvu prijatého tepla telesom s hmotnosťou m_2, tzn.

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= \Delta Q_2 \,, \\ c_1\, m_1(T_1 - T) &= c_2\, m_2\,(T - T_2) \,. \end{aligned} \tag{11.13}$$

Rovnica sa nazýva **kalorimetrická rovnica**. Ak dochádza k skupenským

zmenám látok, je potrebné ešte zahrnúť do kalorimetrickej rovnice i toto množstvo tepla.

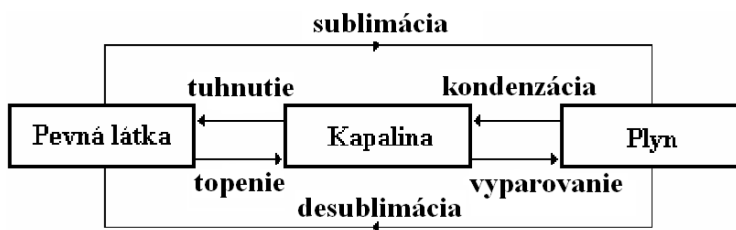
Ak budeme predpokladať, že aj nádoba, kde prebieha tepelná výmena, prijíma nejaké teplo, treba ho zahrnúť do kalorimetrickej rovnice. Výsledná rovnica bude mať potom tvar

$$c_1 \, m_1(T_1 - T) = c_2 \, m_2 \,(T - T_2) + C \,(T - T_2) \;, \tag{11.14}$$

kde veličina $C\,(T - T_2)$ predstavuje teplo, ktoré prijal kalorimeter s príslušenstvom.

11.6 Zmeny skupenstva látky

Pevná látka, kvapalina a plyn sú termodynamické sústavy, ktoré sa skladajú z veľkého počtu častíc. Ak má sústava v rovnovážnom stave vo všetkých častiach rovnaké fyzikálne a chemické vlastnosti (napr. rovnakú hustotu, štruktúru, chemické zloženie), nazýva sa **fáza**. Pod fázami rozumieme jednotlivé skupenstvá látky (pevná ortuť, kvapalná ortuť, ortuťové pary). Jednotlivé fázy sú spravidla od seba oddelené ostrým rozhraním, no sú stavy i s väčším počtom fáz. Sústavami s väčším počtom fáz sú napríklad: voda + ľad + vodná para, pevný jód + jódové pary, kvapalná ortuť + ortuťové pary atď.



Obrázok 11.1: Typy premien fáz.

Prechod látky z jednej fázy do druhej nazývame **fázová zmena.** Fázová zmena je napríklad topenie kovu, vyparovanie kvapaliny, ale tiež premena grafitu na diamant a pod. Ďalej sa budeme zaoberať len fázovými zmenami, ktoré sa nazývajú **zmeny skupenstva.** Tieto zmeny patria medzi **fázové zmeny prvého druhu,** ktoré sú charakterizované tým, že pri nich dochádza k pohlcovaniu alebo uvoľňovaniu tepla, a tým, že sa objem pri zmene jednej fázy na druhú mení skokom. Medzi zmeny skupenstva patrí topenie, tuhnutie, vy-

parovanie, kondenzácia, sublimácia a desublimácia. Všetky tieto zmeny sú uvedené v diagrame na obrázku. 11.1.

Ak zahrievame teleso z kryštalickej látky, zvyšuje sa jeho teplota a po dosiahnutí **teploty topenia** T_t (teplota topenia závisí od vonkajšieho tlaku) sa mení na kvapalinu. Dodané teplo potrebné pre zmenu pevného telesa o hmotnosti m zahriateho na teplotu topenia na kvapalinu tej istej teploty sa volá **skupenské teplo topenia** L_t. Pretože skupenské teplo topenia závisí od hmotnosti telesa, zavádzame veličinu **merné skupenské teplo topenia** l_t**,** definované vzťahom

$$l_t = \frac{L_t}{m} \,. \tag{11.15}$$

Jednotkou merného skupenského tepla topenia je $1\,J/kg$. Merné skupenské teplo topenia je tepelnou konštantou látok a má pre rôzne látky rôznu hodnotu, napr. pre ľad je $l_t = 334\,kJ/kg$.

Pri každej teplote existujú v kvapalinách aj tuhých látkach molekuly s takou kinetickou energiou, že sú schopné prekonať príťažlivú silu od susedných častíc a uvoľniť sa z látky. Pri kvapalinách tomuto javu hovoríme **vyparovanie** a pri tuhých látkach **sublimácia**. Vyparovanie je teda dej, pri ktorom sa kvapalina mení na svoju paru. Tento dej prebieha pri každej teplote. S narastajúcou teplotou pri zachovaní ostatných parametrov rýchlosť vyparovania vzrastá, lebo v látke je stále viac molekúl s dostatočnou energiou na opustenie látky.

Pri vyparovaní sa z kvapaliny uvoľňujú molekuly s vyššou kinetickou energiou. To spôsobuje, že celková kinetická energia neusporiadaného pohybu molekúl kvapaliny klesá, čo sa makroskopicky prejavuje poklesom teploty kvapaliny. Pri vyparovaní sa teda kvapalina ochladzuje. Ak ju chceme udržovať stále na rovnakej teplote, musíme jej dodávať teplo z vonkajšieho prostredia. Toto teplo sa pri vyparovaní kvapaliny z hladiny nazýva **skupenské teplo vyparovania** a pri vare kvapaliny **skupenské teplo varu**. Je ho možné určiť pomocou analogického vzťahu k vzťahu (11.15) v tvare

$$L = m\,l_v \tag{11.16}$$

kde m predstavuje hmotnosť vyparenej kvapaliny a l_v predstavuje merné skupenské teplo vyparovania alebo varu kvapaliny. Merné skupenské teplo vyparovania (varu) predstavuje **množstvo tepla, ktoré musíme dodať jednému kilogramu kvapaliny s teplotou** T**, aby sa premenila na paru s tou istou teplotou**. Merné skupenské teplo vyparovania závisí od druhu

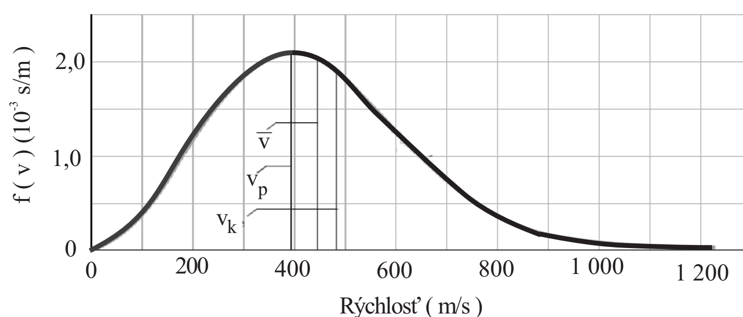
látky a teploty a s klesajúcou teplotou klesá. Ak sa para premieňa na kvapalinu, hovoríme o **kondenzácii**.

11.7 Ideálny plyn a stavová rovnica

Plynné skupenstvo má zo všetkých skupenstiev relatívne najjednoduchšiu štruktúru. Skladá sa z atómov a molekúl, ktorých charakteristické parametre sme popísali na začiatku kapitoly v časti: Tepelný pohyb v látkach. Pri odvodzovaní zákonov platných pre plyn je však výhodné nahradiť skutočný plyn zjednodušeným modelom, ktorý nazývame **ideálny plyn**. Ideálny plyn má nasledujúce vlastnosti: rozmery molekúl (častíc) zanedbávame, molekuly nepôsobia na seba príťažlivými silami, vzájomé zrážky sú dokonale pružné, doba zrážky je zanedbateľná a pohyb molekúl je dokonale neusporiadaný.

Ako sme už spomínali, kinetická energia častíc plynu je väčšia ako potenciálna energia vyplývajúca zo vzájomných príťažlivých síl, a preto sa častice plynu pohybujú voľne v priestore, ktorý vypĺňajú, od zrážky k zrážke. Častice plynu takto narážajú napr. aj na steny nádoby, v ktorej sú uzavreté, čo registrujeme ako tlak. Ďalej bude ukázané ako tlak súvisí s kinetickou energiou (rýchlosť) častíc plynu.

$$f(v) = 4\,\pi \left(\frac{M_m}{2\,\pi\,R\,T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2\, exp \left(-\frac{M_m\, v^2}{2\,R\,T} \right) . \tag{11.17}$$



Obrázok 11.2: Priebeh Maxwellovej funkcie pre molekuly vzduchu pri izbovej teplote.

Pretože nemôžeme zistiť skutočnú rýchlosť každej jednej molekuly plynu, musíme pracovať len so štatistickými údajmi o rýchlostiach molekúl plynu. An-

glický fyzik James Clark Maxwell definoval funkčnú závislosť, ktorá vyjadruje rozdelenie rýchlosti molekúl v ideálnom plyne (obr. 11.2). Funkcia popisujúca dané rozdelenie sa volá Maxwellova funkcia a má tvar:

Na základe tejto funkcie a ďalších výpočtov sa dá vypočítať najpravdepodobnejšia rýchlosť v_p, stredná rýchlosť $\bar{v} = \int v\, f(v)\, \mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8\,R\,T}{\pi\,M_m}}$ a stredná kvadratická rýchlosť molekúl

$$v_k^2 = \int_0^\infty v^2\, f(v)\, \mathrm{d}v \qquad v_k = \sqrt{\frac{3\,R\,T}{\pi\,M_m}} = \sqrt{\frac{3\,k\,T}{m}}\ . \tag{11.18}$$

Rýchlosť v_k je teda taká rýchlosť, že keby sa ňou pohybovali všetky častice plynu, tak by sme nič nespozorovali na jeho celkovej kinetickej energii. Napr. pri teplote $273,15\,K$ majú molekuly plynu vzduchu rýchlosť $v_k = 485\,m/s$.

Vzájomné zrážky molekúl a zrážky molekúl so stenami nádoby spôsobujú, že sa ich rýchlosť neustále mení čo do veľkosti i do smeru. Preto sa v každom okamihu mení i kinetická energia posuvného pohybu týchto častíc. Zrážky molekúl ideálneho plynu sú ale pružné, preto pri konštantnej teplote je **celková kinetická energia** plynu konštantná. Celkovú kinetickú energiu môžeme zapísať teda ako

$$\varepsilon = \sum_i^N \frac{1}{2} m\, v_i^2 = N\, \frac{1}{2} m\, v_k^2 = N\, \frac{3}{2} k\, T\ , \tag{11.19}$$

kde m a v_i sú hmotnosť a rýchlosť i-tej častice a N je celkový počet častíc. Pri úprave sme použili vyjadrenie pre strednú kvadratickú rýchlosť (11.18).

Zo získaného vzťahu pre celkovú kinetickú energiu molekúl je vidieť, že táto energia závisí od počtu častíc a hlavne od teploty. **Molekuly ideálneho plynu majú v dôsledku neusporiadaného posuvného pohybu celkovú kinetickú energiu, ktorá je priamoúmerná termodynamickej teplote plynu.** (Z tohoto vzťahu tiež vyplýva, že ak teplota dvoch rôznych ideálnych plynov je rovnaká, potom molekuly týchto plynov majú rovnakú kinetickú energiu. To však ale znamená, že molekuly s menšou hmotnosťou sa pohybujú väčšou rýchlosťou ako molekuly s väčšou hmotnosťou.)

Základným predpokladom kinetickej teórie plynov je dokonalá neusporiadanosť molekulového pohybu, v našom prípade posuvného a rotačného. Ani jeden typ z daných pohybov nemá prednosť pred druhým. Ak teda zoberieme časticu ako jednoatómovú molekulu s 3 stupňami voľnosti, potom jej priemerná kinetická energia je: $\frac{3}{2}k\,T$, čo je vlastne ε/N (11.19). Teda na každý stupeň voľnosti pripadá energia: $\frac{1}{2}k\,T$. Tento záver je vyjadrený v zákone

rovnomerného rozdelenia energie známeho pod názvom **ekvipartičná teoréma**. V matematickom vyjadrení - pre sústavu s i stupňami voľnosti bude platiť

$$\varepsilon_i = \frac{i}{2}\, k\, T\ . \tag{11.20}$$

Pri tepelných výpočtoch, hlavne pre plyny používame tepelnú kapacitu vzhľadom na 1 mol látky, ktorú voláme **molárna tepelná kapacita pri konštantnom objeme** C_V. Platí pre ňu vzťah :

$$C_V = \frac{i}{2}\, R\ , \tag{11.21}$$

kde $i = 3,\ 5,\ 6$ je počet stupňov voľnosti molekuly plynu. Jednotkou molárnej tepelnej kapacity je $(J.mol^{-1}.K^{-1})$.

Neustály pohyb molekúl plynu uzavretého v nádobe vyvoláva neustále zrážky týchto molekúl so stenami nádoby. Súčasné nárazy molekúl plynu na zvolenú plochu s obsahom S sa prejavujú ako tlaková sila F plynu na túto plochu. Tieto nárazy spôsobujú **tlak plynu** o hodnote $p = F/S$. Z experimentov a skúseností vieme, že ak nemeníme vonkajšie podmienky, tlak plynu je konštantný (priemerný počet dopadov na plochu sa nemení). No ak zahrievame plyn v nádobe, potom pomocou merania zistíme, že sa tlak plynu s rastúcou teplotou zväčšuje. Z toho usudzujeme, že s rastúcou teplotou plynu pôsobia molekuly plynu na stenu nádoby väčšou tlakovou silou. Pretože stredná kvadratická rýchlosť (11.18) molekúl ideálneho plynu je závislá od teploty, dá sa očakávať, že tlak plynu bude súvisieť nejako s touto rýchlosťou. Ako prvý s touto myšlienkou prišiel v roku 1740 Daniel Bernoulli, v roku 1851 James Prescott Joule a v roku 1857 Rudolf Clausius[6]. Závislosť môžeme písať v tvare

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{1}{2} m\, v_k^2\ , \tag{11.22}$$

kde N je počet molekúl plynu, V objem plynu, m hmotnosť molekuly a v_k je stredná kvadratická rýchlosť. Tento vzťah sa nazýva **základná rovnica pre tlak ideálneho plynu.** Je jedným z najdôležitejších výsledkov kinetickej teórie plynov. Dáva do súvislosti veličiny, ktoré sa vzťahujú na molekuly

[6]RUDOLF EMANUEL CLAUSIUS (1822 – 1888), nemecký fyzik, jeden zo zakladateľov termodynamiky. V práci z roku 1850 ako prvý vyslovil druhú vetu termodynamickú. Pracoval na kinetickej teórii tepla, vypočítal rýchlosť molekúl plynu a tlak plynu na steny nádoby. Je spoluautorom rovnice vyjadrujúcej závislosť tlaku pár kvapalín od teploty (Clausiova-Clapeyronova rovnica).

(hmotnosť a rýchlosť molekúl) s veličinou, ktorá charakterizuje plyn ako celok a dá sa bezprostredne merať pri pokusoch (tlak a teplota plynu). Ak dosadíme do predošlého vzťahu vyjadrenie za strednú kvadratickú rýchlosť (11.18), tak po malej úprave dostaneme rovnicu

$$p\,V = N\,k\,T\,. \tag{11.23}$$

Rovnica (11.23) sa nazýva **stavová rovnica ideálneho plynu** a dáva do súvisu tzv. stavové veličiny plynu, čo sú tlak p, objem V a termodynamická teplota T. Vyplýva z nej, že pri rovnakom tlaku, objeme a teplote obsahujú rôzne plyny rovnaký počet častíc. Stavová rovnica ideálneho plynu platí presne len pre ideálny plyn, tzn. pre plyn bez vnútorného trenia a dokonale stlačiteľný.

Rovnicu (11.23) môžeme vyjadriť i v inom tvare. V chémii sa často nepracuje s počtom častíc, ale s počtom mólov. Ak použijeme vzťahy (11.3) a (11.4), potom stavová rovnica bude mať tvar

$$p\,V = n\,R\,T\,. \tag{11.24}$$

11.8 Termodynamické veličiny a zákony

Práca plynu

Plyn s dostatočne veľkým tlakom uzavretý vo valci s pohyblivým piestom P môže rozpínaním konať prácu (obr. 11.3). Pri stlačení (zmenšení objemu) plyn zase prijíma prácu. Ak je v nádobe tlak plynu p, potom na piest pôsobí tlaková sila: $F = p\,S$ (S je plocha piesta). Pri malom posunutí piesta Δs sa tlak plynu zreteľne nezmení a vykonaná práca sa dá zapísať ako

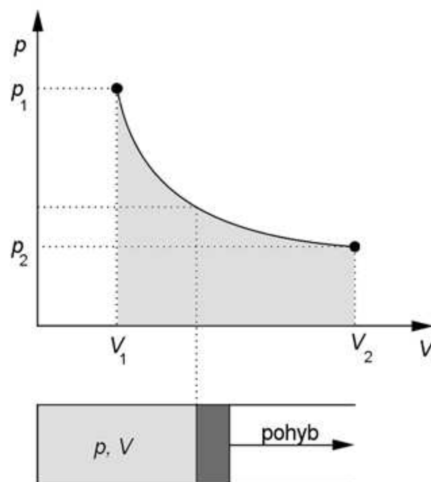
$$\Delta W = F\,\Delta s = p\,S\,\Delta s = p\,\Delta V\,, \tag{11.25}$$

pričom $\Delta V = S\,\Delta s$ je zmena objemu. Pokiaľ zabezpečíme, že sa počas deja nebude meniť tlak plynu (kap. 11.9 Izobarický dej), tak potom vzťah (11.25) predstavuje prácu, ktorú vykoná plyn pri zväčšení svojho objemu z V_1 na V_2, teda $\Delta V = V_2 - V_1$. Ak sa počas daného deja zmenšuje objem, práca je potom záporná, čo znamená, že plyn prijíma prácu.

Ak sa počas deja mení tlak plynu (napr. 11.9 Izotermický dej) potom elementárna práca, ktorú musíme vykonať, je daná vzťahom: $\mathrm{d}W = p(V)\,\mathrm{d}V$.

Výsledná práca, ktorú vykoná plyn pri zväčšení objemu sa počíta pomocou integrálneho vzťahu

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \,\mathrm{d}V \; . \qquad (11.26)$$



Obrázok 11.3: Zmena tlaku pri zmene objemu, práca plynu pri posúvaní piestu.

Vnútorná energia

Pri štúdiu mechaniky ste sa zoznámili s kinetickou a potenciálnou energiou telesa (kapitola 4.2.3 Energia). Každé látkové teleso má však tiež energiu, ktorá súvisí s jeho vnútornou časticovou štruktúrou. Túto energiu voláme **vnútorná energia** telesa (v termodynamike je teleso považované za termodynamickú sústavu, preto je to tiež vnútorná energia termodynamickej sústavy).

Už vieme, že častice látky (atómy, molekuly, ióny) konajú neustály a neusporiadaný pohyb (posuvný, otáčavý, kmitavý). Teda celková kinetická energia všetkých neusporiadane sa pohybujúcich častíc látky je jednou zložkou vnútornej energie sústavy (telesa). Ďalšia zložka vnútornej energie sústavy je celková potenciálna energia všetkých častíc, ktorá závisí od vzájomných polôch častíc a síl pôsobiacich medzi nimi. Tieto dve uvedené zložky vnútornej energie sú rozhodujúce pri vyšetrovaní dejov, ktoré budeme ďalej študovať. Pre úplnosť je treba ešte uviesť ďalšie zložky vnútornej energie telies, i keď ich nebudeme v ďalšom výklade brať do úvahy, pretože sa pri študovaných dejoch nebudú meniť. Medzi ne patrí: energia chemická, ktorá má príčinu vo vzájom-

ných chemických väzbách; elektrická energia, ktorú majú elektricky nabité častice, ak sa sústava nachádza v elektrickom poli a ďalšie.

Vnútornú energiu U **sústavy (telesa)** budeme teda definovať ako **súčet celkovej kinetickej energie neusporiadane sa pohybujúcich častíc sústavy a celkovej potenciálnej energie vzájomnej polohy jej častíc.** Vnútorná energia patrí medzi stavové veličiny a jej jednotkou je jeden joule.

Vnútorná energia systému nie je všeobecne konštantnou veličinou. Deje, pri ktorých sa mení vnútorná energia sústavy, možno rozdeliť do dvoch skupín:

- deje, pri ktorých sa mení vnútorná energia konaním práce,
- deje, pri ktorých nastáva zmena vnútornej energie tepelnou výmenou.

Pri konaní práce sa mení kinetická alebo potenciálna energia telesa na jeho vnútornú energiu alebo naopak, napr. pri trení dvoch telies, pri stlačení plynu v tepelne izolovanej nádobe, pri ohýbaní drôtu, pri nepružnom náraze telies na podložku a pod. Ak dej prebieha v izolovanej sústave, zostáva súčet kinetickej a potenciálnej, teda vnútornej energie telies konštantný.

Celková kinetická energia častíc systému závisí len od teploty (11.19). Teda so zmenou teploty sa mení potom aj vnútorná energia systému: $\Delta U = \Delta\varepsilon$. Ak spojíme rovnicu (11.19) s vyjadrením molárnej tepelnej kapacity C_V (tri stupne voľnosti, (11.21)) a vzťahmi (11.3)-(11.4), môžeme potom zmenu vnútornej energie pre n mólov, resp. pre m kilogramov plynu písať ako

$$\Delta U = n\, C_V\, \Delta T = \frac{m}{M_m} C_V\, \Delta T\,. \tag{11.27}$$

V technickej praxi sú dôležité také deje, pri ktorých sústava prijíma alebo odovzdáva energiu oboma spôsobmi, t. j. tepelnou výmenou i konaním práce. Napríklad plyn vo valci stláčame piestom a súčasne zahrievame stykom s teplejším telesom. Vzťah medzi veličinami W, ΔU a Q vyjadruje I. termodynamický zákon.

I. a II. termodynamický zákon

Ako už vieme, vnútorná energia sa môže meniť buď konaním práce alebo dodaním tepla. Najčastejšie sa však mení oboma spôsobmi naraz. Túto skutočnosť popisuje **I. termodynamický zákon: Vnútorná energia** U **systému narastie, ak mu dodá okolie teplo** Q **a klesne, keď systém vykoná**

nejakú prácu W. Zákon môžeme vyjadriť vzťahom

$$\Delta U = Q - W \; . \qquad (11.28)$$

Ak sústave dodáme teplo a vykonáme na nej nejakú prácu (zmenšíme jej objem), jej vnútorná energia narastie. Ak sústava odovzdáva teplo alebo koná prácu (expanduje), jej vnútorná energia klesá. Teda ak sústava koná prácu, prácu považujeme za kladnú a naopak, keď koná vonkajšia sila prácu na sústave, bude práca so záporným znamienkom.

I. termodynamický zákon možno tiež formulovať aj inak: **nie je možné zostrojiť také zariadenie, tzv. perpetum mobile prvého druhu, ktoré by vykonávalo prácu bez zmeny svojej energie alebo energie okolia**. Doslova názov perpetum mobile znamená niečo, čo sa stále (samo od seba) pohybuje, pričom v prípade termodynamiky ešte koná užitočnú prácu.

Podobné znenie má i **II. termodynamický zákon,** ktorý hovorí: **Nie je možné zostrojiť periodicky pracujúci tepelný stroj, ktorý by len prijímal teplo od určitého telesa (ohrievača) a vykonával rovnako veľkú prácu**. Teda nemožno zostrojiť perpetuum mobile druhého druhu (termodynamické; prvého druhu je mechanické).

11.9 Tepelné deje v ideálnom plyne

Pri tepelných dejoch - stavových zmenách plynu alebo pary (predpokladáme, že sa množstvo plynu nemení) sa môžu meniť tri stavové veličiny: p, V, T. Počas daného deja sa tiež privádza alebo odvádza teplo Q, prípadne plyn koná prácu W, teda mení sa aj vnútorná energia U. Najjednoduchšie sú také zmeny, kedy sa menia len dve zo stavových veličín a tretia zostáva konštantná, prípadne nenastáva tepelná výmena s okolím. Takto získame nasledujúce najdôležitejšie zmeny stavu:

- izotermická - konštantná je teplota,
- izochorická - konštantný je objem,
- izobarická - konštantný je tlak,
- adiabatická - nenastáva tepelná výmena s okolím.

V praxi sa skutočné procesy od týchto ideálnych stavov líšia. Vždy sa však vyberá ten proces, ktorý najlepšie zodpovedá skutočnosti.

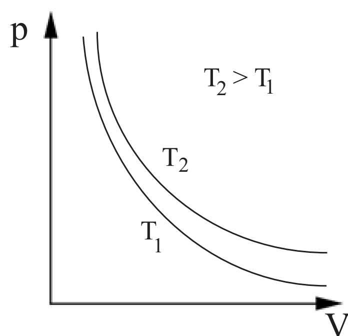
Izotermický dej

Izotermický dej je taký, pri ktorom sa zachováva teplota (T = *konšt.)*. Súvislosť tlaku plynu a jeho objemu objavil Róbert Boyle a uverejnil ho roku 1660 a nezávisle od neho i Edme Mariotte v roku 1679. Hoci je prvenstvo Boyla jasné, napriek tomu sa zákon pôvodne nazýval len Mariottov, pretože jeho formulácia bola ďaleko jasnejšia. Formulácia **Boylovho-Mariottovho zákona znie: súčin tlaku a objemu určitého množstva plynu je pri stálej teplote konštantný**. Matematicky

$$p\,V = p_0\,V_0 = \text{ konšt. }, \tag{11.29}$$

kde p_0 a V_0 sú začiatočné hodnoty tlaku a objemu.

Grafické znázornenie zmien parametrov deja zobrazujeme v pV diagrame (obr. 11.4), pričom krivka zodpovedajúca danému deju sa volá **izoterma**. Klasickým prípadom izotermického deja je pomalé stláčanie uzavretej striekačky.



Obrázok 11.4: Izotermický dej.

Keďže sa nemení teplota plynu, nemení sa ani stredná kinetická energia jeho molekúl. Preto pri izotermickom deji je vnútorná energia ideálneho plynu konštantná, takže $\Delta U = 0\,J$. Z I. termodynamického zákona vyplýva, že teplo Q prijaté ideálnym plynom pri izotermickom deji sa rovná práci W, ktorú pri tomto deji vykoná: $Q = W$. Práca (11.26), ktorú koná plyn pri svojom rozpínaní sa dá vypočítať ako

$$W = \int p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{N\,k\,T}{V}\mathrm{d}V = N\,k\,T\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\mathrm{d}V = N\,k\,T\,ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\;, \tag{11.30}$$

kde tlak plynu sme vyjadrili ako: $p = (N\,k\,T)/V$ zo stavovej rovnice (11.23).

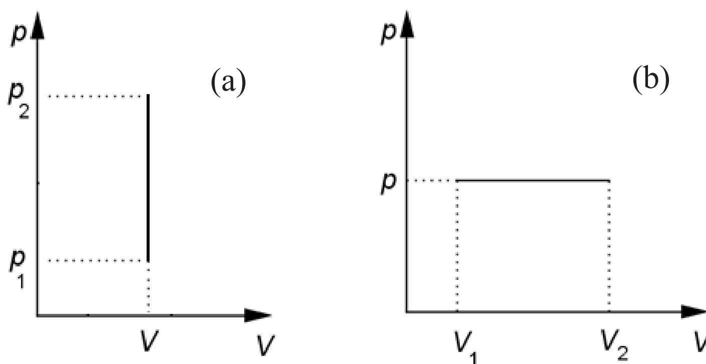
Izochorický dej

Ak pri zmene tlaku alebo teploty plynu v nádobe zaistíme konštantný objem, potom ide o **izochorický dej** (V = *konšt.)*. Tento dej popisuje **Charlesov zákon**

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{ konšt. }, \tag{11.31}$$

kde p_0 a T_0 sú začiatočné hodnoty tlaku a teploty.

Pri izochorickom deji s ideálnym plynom stálej hmotnosti je tlak plynu priamoúmerný jeho termodynamickej teplote. Grafické znázornenie závislosti tlaku plynu od objemu pri izochorickom deji sa nazýva **izochora** (obr. 11.5(a)). Ako príklad tohto deja sa dá uviesť nebezpečenstvo zahrievania plynovej flaše počas požiaru.



Obrázok 11.5: (a) Izochocký dej. (b) Izobarický dej.

Keďže pri tomto deji sa nemení objem plynu, práca vykonaná plynom je nulová: $W = 0\,J$. Po energetickej stránke na základe I. termodynamického zákona (11.28) platí

$$\mathrm{d}Q = \frac{m}{M} C_V \,\mathrm{d}T + \mathrm{d}W = \frac{m}{M} C_V \,\mathrm{d}T = \mathrm{d}U$$

a intergáciou podľa teploty od T_1 po T_2 dostaneme

$$Q = \frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_1\right) . \tag{11.32}$$

Zo získaných výsledkov je jasné, že pri izochorickom deji sa práca nekoná a dodaným teplom sa zvýši len vnútorná energia plynu.

Izobarický dej

Ak pri zmene objemu alebo teploty plynu v nádobe zaistíme konštantný tlak, potom ide o **izobarický dej** ($p =$ *konšt.)*. Potom môžeme stavovú rovnicu upraviť do tvaru **Gayovho-Lussacovho zákona**

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{ konšt. }, \tag{11.33}$$

kde T_0 a V_0 sú začiatočné hodnoty teploty a objemu.

Pri izobarickom deji s ideálnym plynom stálej hmotnosti je objem plynu priamoúmerný jeho termodynamickej teplote. Grafické znázornenie závislosti objemu plynu od jeho termodynamickej teploty pri izobarickom deji sa nazýva **izobara** (obr. 11.5(b)).

Práca, ktorú vykoná plyn, zodpovedá obsahu obdĺžnika pod izobarou:

$$W = p\,\Delta V = p\,(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R\,\Delta T\,. \tag{11.34}$$

Pri skúmaní tohoto javu z hľadiska energetických pomerov vyjdeme zase z I. termodynamického zákona (11.28). Platí

$$\mathrm{d}Q = \frac{m}{M} C_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V = \frac{m}{M}(C_V + R)\,\mathrm{d}T = \frac{m}{M} C_P\,\mathrm{d}T\,, \tag{11.35}$$

pričom sme využili **Mayerovu rovnicu**: $C_P = C_V + R$.

Integráciou predošlej rovnice dostaneme pre dodané teplo vzťah

$$Q = \frac{m}{M} C_P\,(T_2 - T_1)\,, \tag{11.36}$$

kde C_P je **tepelná kapacita plynu pri konštantnom tlaku**.

Adiabatický dej

Adiabatický dej je taký, pri ktorom je plyn tepelne izolovaný, a preto žiadnu tepelnú energiu zvonku ani neprijíma, ani neodovzdáva. Z I. termodynamického zákona teda platí

$$\Delta U = W\,. \tag{11.37}$$

Pri adiabatickej kompresii, keď sa plyn stláča (plyn prácu prijíma), sa aj zohrieva (vnútorná energia rastie). Ak plyn koná prácu, zväčší svoj objem (adiabatická expanzia) a súčasne sa aj ochladí. Plyn koná prácu na úkor svojej vnútornej energie. Pri adiabatickej kompresii tlak plynu rastie rýchlejšie ako

pri izotermickej zmene. Krivka, po ktorej sa mení tlak plynu, je znázornená na obrázku 11.6 a nazýva sa **adiabata**. Adiabata rastie (klesá) rýchlejšie než izoterma.

Pre adiabatický dej s ideálnym plynom stálej hmotnosti platí **Poissonov**[7] **zákon**

$$p\,V^{\kappa} = p_0\,V_0^{\kappa} = \text{ konšt. }, \tag{11.38}$$

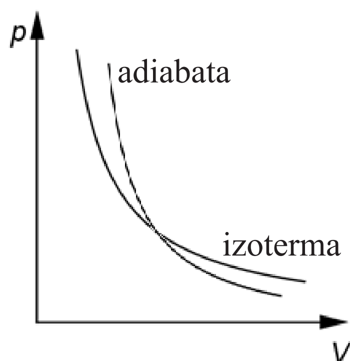
kde

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

je **Poissonova konštanta**, ktorá je vždy väčšia ako 1 ($C_P > C_V$). Pre stanovenie hodnoty Poissonovej konštanty sa používa metóda založená na rýchlosti zvukových vĺn v danom plyne, pričom podľa Pierra Simona Laplace platí

$$v = \sqrt{\kappa\,\frac{p}{\rho}}\,,$$

kde ρ je hustota plynu.



Obrázok 11.6: Adiabatický dej.

V technickej praxi sa dosahuje adiabatická kompresia alebo expanzia tak, že tieto deje prebehnú tak rýchlo, že plyn neprijme ani neodovzdá teplo. Ochladenie plynu pri adiabatickej expanzii sa využíva na získavanie nízkych teplôt. Príkladom adiabatickej expanzie je rýchle zväčšenie objemu oxidu uhličitého po otvorení sifónovej bombičky - teleso bombičky sa značne ochladí. Zvýšenie

[7]SIMÉNON DENIS POISSON (1781 – 1840) bol francúzsky fyzik a matematik. Bol členom Francúzskej akadémie vied (1812) a tiež Petrohradskej akadémie vied (1826). Je považovaný za jedného zo zakladateľov matematickej fyziky. Aplikoval matematickú teóriu potenciálov na riešení otázok elektrostatiky a magnetizmu.

teploty pri adiabatickej kompresii spôsobí napr. zapálenie pohonných látok vo valcových vznetových motoroch.

Reálny plyn

Do akej miery zodpovedá chovanie sa reálneho plynu zákonom, ktoré sme uviedli v predchádzajúcich odsekoch? Daniel Bernoulli a neskoršie Michail Vasiljevič Lomonosov upozornili, že pri väčších tlakoch neplatí stavová rovnica. Experimentálne overenie stavovej rovnice pri reálnych plynoch ukazuje, že rovnica popisuje dostatočne presne tepelné deje v plynoch pri primeraných hodnotách tlaku a vysokých teplotách. S rastúcim tlakom a poklesom teploty sa pozorujú veľké odchýlky od stavovej rovnice.

Prečo sa vlastnosti reálnych plynov odlišujú od vlastností ideálnych plynov? Je to spôsobené tým, že ideálny plyn je definovaný ako sústava molekúl, ktoré na seba navzájom nepôsobia a ich rozmery môžeme zanedbať. Molekuly reálnych plynov na seba však pôsobia súčasne príťažlivými a odpudivými silami s určitou hodnotou.

Holandský fyzik J. Waals[8] v roku 1873 odvodil stavovú rovnicu pre reálny plyn za predpokladu, že molekuly majú vlastný objem a pôsobia na seba navzájom príťažlivými silami. **Stavová rovnica reálneho plynu** pre plyn s látkovým množstvom 1 *mol* má tvar

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = R_m T \ , \qquad (11.39)$$

kde a a b sú experimentálne určené konštanty závislé od druhu plynu. Konštanta b koriguje vlastný objem molekúl v jednom móli plynu a člen a/V_m^2 kohézny tlak plynu. **Van der Waalsova stavová rovnica** platí pre reálne plyny presnejšie ako stavová rovnica ideálneho plynu a dá sa použiť i pri vysokých tlakoch.

[8]JOHANNES DIDERIK van der WAALS (1837 – 1923) bol holandský fyzik, nositeľ Nobelovej ceny (r. 1910) za prácu na stavovej rovnici plynov a kvapalín.

12 Elektrostatické pole vo vákuu

Na telesá, s ktorými sa bežne stretávame v prírode, pôsobí hlavne príťažlivá gravitačná sila. No už v staroveku poznali aj inú interakciu. Grécky učenec Thales z Milétu[1] v 6. stor. p. n. l. popísal schopnosť jantáru treného vlnou priťahovať ľahké predmety. Anglický lekár W. Gilbert[2] v 16. storočí vykonal pokusy, pri ktorých aj iné predmety pri trení vykazovali podobné vlastnosti ako jantár. Pretože jantár je grécky elektrón, dostal tento stav názov **elektrický stav.** O telesách v tomto stave hovoríme, že sú elektricky nabité. Sile, ktorou pôsobia tieto telesá na okolie, sa hovorí **elektrická sila** a na rozdiel od gravitačnej môže byť príťažlivá a odpudivá. Elektrické pole charakterizujeme vektorovou funkciou. Silové pôsobenie medzi elektrickými nábojmi vo všeobecnosti závisí od toho, či sú náboje v pokoji, alebo vo vzájomnom pohybe. V tejto kapitole sa budeme zaoberať elektrostatickým poľom, teda poľom, ktoré vytvára elektrický náboj, ktorý je v pokoji.

12.1 Charakteristiky elektrického náboja

Príčinou elektrického stavu daného telesa je jeho **elektrický náboj**, jedna zo základných charakteristík mikročastíc. Poznáme dva typy elektrického náboja: **kladný** a **záporný**. Pokiaľ sa v telese nachádza rovnaký počet kladných aj záporných nábojov, hovoríme, teleso je elektricky neutrálne, výsledný náboj je nulový (napr. atóm). Pokiaľ jeden typ náboja prevyšuje, prejavuje sa

[1]THALES z MILÉTU (asi 624 – 547) grécky učenec, prvý predstaviteľ milétskej školy.

[2]WILLIAM GILBERT (1544 – 1603) bol anglický prírodovedec a lekár. Zaoberal sa najmä elektrinou a magnetizmom. Uznávaný londýnsky doktor (a osobný lekár Alžbety I.) Napísal knihu De Magnete (O magnetizme) vysvetlil, ako sa magnety priťahujú a odpudzujú. Poukázal aj na to, že Zem je ako obrovský tyčový magnet, a preto strelka kompasu vždy smeruje na sever.

ich rozdiel ako voľný náboj a hovoríme o elektrickom stave telesa. Elektrické náboje vytvárajú okolo seba elektrické pole, ktoré pôsobí na iné náboje elektrickou silou. Ak elektrický náboj zmení svoju polohu, tak sa zmení aj jeho elektrické pole, pričom táto zmena poľa sa šíri rýchlosťou svetla. To, že silové pôsobenie sa šíri konečnou rýchlosťou, ukázala až teória relativity na začiatku minulého storočia.

Základné poznatky o elektrických nábojoch:

1. Elektrický náboj je vždy spojený s časticou s nenulovou hmotnosťou.

2. Elektrický náboj môžeme prenášať z povrchu jedného telesa na povrch iného telesa. Náboj sa môže premiestňovať aj v telese. Látky, v ktorých sa elektrický náboj voľne premiestňuje, voláme vodiče. V iných látkach sa zas nemôže voľne pohybovať prakticky žiadny náboj, preto tieto látky voláme dielektriká - nevodiče.

3. Existujú dva druhy elektrického náboja: kladný a záporný.

4. Zákon zachovania náboja: v elektricky izolovanej sústave telies je celkový elektrický náboj konštantný, elektrický náboj nemožno vytvoriť ani zničiť, je ho možné len premiestňovať.

5. Elektrický náboj je deliteľný. Nemožno ho však deliť neobmedzene, ale iba po **elementárny elektrický náboj**: $e = 1,602 \times 10^{-19}\,C$. Nositeľmi náboja sú elementárne častice: elektrón (záporný náboj), protón (kladný náboj) a iné. V atóme je rovnaký počet protónov (jadro) a elektrónov (obal), takže navonok sa tvári ako elektricky neutrálny. Pokiaľ bol z atómu vyrazený elektrón, hovoríme o kladnom ióne a v prípade zachytenia ďalšieho elektrónu atómom ide o záporný ión.

6. Zákon superpozície: pri súčasnom pôsobení viacerých bodových nábojov je účinok rovnaký, ako keby pôsobil jeden náboj s nábojom všetkých ostatných nábojov.

7. Zákon invariantnosti: elektrický náboj je vo všetkých sústavách invariantný, t. j. nameraná veľkosť náboja je celkom nezávislá od rýchlosti pohybu častice.

Elektrický náboj ako fyzikálnu veličinu označujeme Q alebo q a jeho jednotka je 1 **coloumb** (C), teda $[Q] = 1\,C$. Pri definícii tejto jednotky sa

nevychádza z Coulombovho zákona. Jeden Coulomb je elektrický náboj, ktorý prejde vodičom za 1 s pri ustálenom prúde 1 A. Ampér (A) je jednou zo základných veličín v sústave SI. Význam tohto vyjadrenia bude celkom jasný až po preštudovaní nasledujúcej kapitoly: Elektrický prúd. Elektrický prúd súvisí na jednej strane s elektrickým nábojom, no na drujej strane tiež má magnetické účinky (kap. 15.5).

Všetky nabité makroskopické telesá obsahujú určité množstvo elektrického náboja. Tento náboj je rozložený v objeme (resp. na povrchu) telesa v takom množstve, že dané rozloženie považujeme za spojité.

Vzhľadom na tvar a rozmery telesa definujeme objemovú, plošnú a dĺžkovú hustotu elektrického náboja.

- objemová hustota elektrického náboja: $\rho = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$, (C/m^3),
- plošná hustota elektrického náboja: $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}$, (C/m^2),
- dĺžková hustota elektrického náboja: $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}$, (C/m).

Ak poznáme objemovú hustotu elektrického náboja $\rho(x, y, z)$ ako funkciu priestorových súradníc, dokážeme si potom vypočítať celkový náboj Q v danom objeme V podľa vzťahu

$$Q = \int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V, \tag{12.1}$$

pričom podobný vzťah platí aj pre plošnú a dĺžkovú hustotu el. náboja.

12.2 Coulombov zákon

Kvantitatívnou charakteristikou elektrickej interakcie je sila. Veľkosť elektrickej sily, ktorou pôsobia na seba dva bodové náboje, prvýkrát zmeral na torzných váhach v roku 1785 francúzsky fyzik Ch. A. Coulomb[3] (12.2). Na základe svojich meraní vyslovil zákon, ktorý sa podľa neho volá **Coulombov zákon**: **Dva bodové náboje v pokoji pôsobia na seba silou, ktorá je priamoúmerná súčinu ich veľkostí a nepriamoúmerná druhej mocnine ich vzdialenosti:**

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_1\,Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,, \tag{12.2}$$

[3]CHARLES COULOMB (1736 – 1806) francúzsky vojenský inžinier a objaviteľ známeho Coulombovho zákona.

kde $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}\, C^2.N^{-1}.m^{-2}$ je permitivita vákua.

Vzťah pre Coulombov zákon je formálne podobný Newtonovmu gravitačnému zákonu (6.4). Podstatný rozdiel je však v pôvode síl a tým aj vo veľkosti konštánt $\kappa = 6,670 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2$ a $k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \doteq 9 \times 10^9\, N.m^2/C^2$. Ak porovnáme elektrickú a gravitačnú silu medzi dvoma elektrónmi zistíme, že elektrická je o neuveriteľných 40 rádov väčšia ako gravitačná sila.

12.3 Intenzita elektrostatického poľa

Podobne ako sme definovali v gravitačnom poli intenzitu gravitačného poľa (6.5), tak aj v prípade elektrického poľa definujeme **intenzitu elektrického poľa**. **Intenzita elektrostatického poľa $\vec{E}$ náboja Q_1 je určená podielom elektrickej sily, ktorá v danom mieste poľa pôsobí na daný bodový náboj Q_2 a veľkosti tohto náboja**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{Q_2} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^3}\vec{r}\,, \tag{12.3}$$

Jednotkou intenzity sú: $[E] = N/C = m.kg.s^{-3}.A^{-1} = V/m$. Jednotku V (**volt**) zavedieme v nasledujúcej časti: 12.7 Elektrické napätie. Napriek tomu, že sme definovali intenzitu ako podiel sily na bodový náboj Q_2, jej hodnota od neho nezávisí a je iba funkciou veľkosti náboja Q_1 a vzdialenosti r od neho. Intenzita poľa je vektorová veličina, ktorej smer a orientácia sú dané vektorom príslušnej sily.

V prípade viacerých nábojov platí pre výsledné elektrostatické pole princíp superpozície, čiže vektorový súčet intenzít od jednotlivých nábojov je rovný výslednej intenzite v danom mieste

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i}\ . \tag{12.4}$$

Ak vieme vyjadriť intenzitu elektrického poľa v okolí náboja ako funkciu $\vec{r}$ ($\vec{E}(\vec{r})$), tak **elektrická sila** pôsobiaca na náboj Q_2 v hociktorom mieste je daná vzťahom

$$\vec{F_e} = Q_2\,\vec{E}\ . \tag{12.5}$$

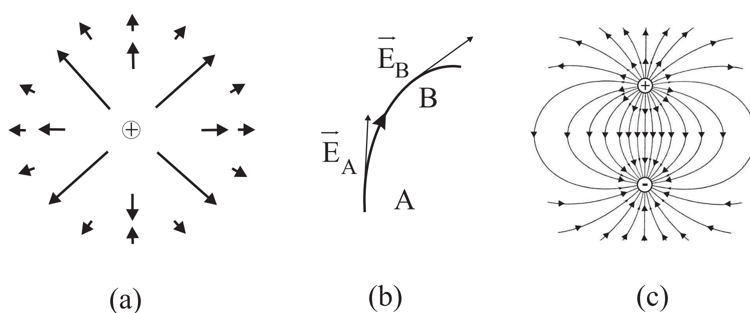
Tento vzťah je po formálnej stránke totožný so vzťahom pre silu pôsobiacu na hmotné teleso v gravitačnom poli $\vec{F} = m\,\vec{K}$ (6.5). Ak však použijeme II. Newtonov pohybový zákon $\vec{F} = m\,\vec{a}$, tak vidíme, že náboj sa v elektrickom

poli bude pohybovať zrýchlene. Vektor zrýchlenia tohto náboja má rovnaký smer s intenzitou elektrického poľa v danom mieste ($\vec{a} \parallel \vec{E}$) a pre veľkosť zrýchlenia platí: $a = (Q_2/m)\,E$.

Doteraz sme formulovali vzťahy pre intenzitu poľa vytvoreného jedným bodovým elektrickým nábojom, resp. sústavou bodových elektrických nábojov. Vo všeobecnom prípade, ak elektrické pole je vytvorené nabitým telesom určitého tvaru, určíme výslednú intenzitu elektrického poľa integráciou elementárnych príspevkov od elektrických nábojov rozložených spojito v elementoch objemu, resp. na plošných elementoch povrchu telesa (využijeme pri tom pojem hustota elektrického náboja a princíp superpozície).

Intenzita elektrostatického poľa $\vec{E}(Q, \vec{r})$ je vektorová funkcia a v každom bode má určitú veľkosť a smer. Môžeme ju znázorniť orientovanou úsečkou príslušnej dĺžky a smeru, a tak znázorniť priebeh poľa (obr. 12.1(a,c)). Druhý, častejšie používaný spôsob je zobrazenie pomocou **siločiar**. Sú to čiary, ku ktorým má vektor intenzity v každom ich bode smer dotyčnice (obr. 12.1(b)), a sú rovnako orientované ako daný vektor. Siločiary daného poľa sa nikde nepretínajú. Siločiary začínajú v kladnom a končia v zápornom elektrickom náboji.

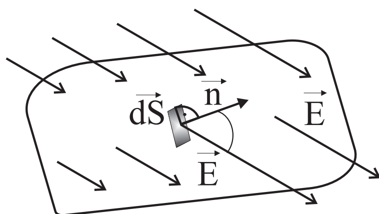
Podľa tvaru rozloženia siločiar rozdeľujeme elektrostatické pole na homogénne a nehomogénne. V homogénnom poli je hodnota intenzity všade konštantná a má rovnaký smer. S homogénnym elektrickým poľom sa stretávame napríklad v rovinnom kondenzátore. Nehomogénne sú všetky polia, pre ktoré neplatí jedno z predošlých tvrdení. Špeciálnym prípadom nehomogénneho poľa je radiálne pole bodového náboja (obr. 12.1(a)).



Obrázok 12.1: Možné tvary siločiar elektrostatického poľa.

12.4 Tok intenzity elektrostatického poľa. Gaussova veta.

Intenzita elektrického poľa charakterizuje pole v celom priestore. Ak však chceme charakterizovať pole v určitej oblasti, zavádzame skalárnu veličinu - tok vektora intenzity elektrického poľa. Vo fyzike pojem tok zovšeobecňujeme aj na iné vektorové polia. Pritom však nič konkrétne netečie. Je tu iba analógia napríklad s poľom vektora rýchlosti prúdiacej kvapaliny - objemu vody, ktorá by pretiekla danou plochou za jednotku času (objemový tok).



Obrázok 12.2: Tok intenzity elektrostatického poľa cez plochu.

Pri definovaní toku elektrickej intenzity budeme postupovať nasledujúco (pozri obr. 12.2). Zvolíme si malú orientovanú rovinnú plôšku $\mathrm{d}\vec{S}$. Tejto plôške priradíme vektor plošného elementu $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ ($\vec{n}$ jednotkový normálový vektor roviny). Pretože plôšky $\mathrm{d}S$ sú ľubovoľne malé, môžeme predpokladať, že elektrické pole určené vektorom intenzity $\vec{E}$ je na každej z nich konštantné. Tok T intenzity elektrického poľa plochou $\mathrm{d}S$ definujeme ako skalárny súčin vektora $\vec{E}$ a vektora elementu plochy $\mathrm{d}\vec{S}$

$$dT = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,. \tag{12.6}$$

Definíciu toku môžeme rozšíriť na tok ľubovoľnou spojitou plochou. Teda **tok vektoru intenzity** vybranou plochou je určený nasledujúcim integrálom:

$$T = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,. \tag{12.7}$$

Vypočítajme teraz tok vektora intenzity elektrostatického poľa bodového náboja z objemu uzavretého guľovou plochou so stredom v mieste náboja. V každom bode tejto guľovej plochy má vektor intenzity (12.3) konštantnú veľkosť a smer zhodný so smerom vonkajšej normály guľovej plochy, teda $\vec{E} \| d\vec{S} \;\Rightarrow\; \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,dS$. Teraz aplikujeme tento poznatok na Gaussovu

vetu, pričom intenzitu môžeme vybrať pred integrál, lebo je na danej ploche konštanta. Zostane nám integrál z uzavretej guľovej plochy, ktorého veľkosť je $S = 4\,\pi\,r^2$. Matematický zápis našej úvahy vyzerá takto:

$$T = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\,\mathrm{d}S = E \oint_S \mathrm{d}S = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,4\,\pi\,r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

Porovnaním koncových vyjadrení predošlého vzťahu dostaneme vyjadrenie pre **Gaussovu**[4] **vetu: Celkový tok intenzity $\vec{E}$ elektrického poľa ľubovoľnou uzavretou plochou S obklopujúcu elektrický náboj sa rovná podielu toho náboja Q a permitivity vákua:**

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,. \tag{12.8}$$

Pre kladný náboj je tok kladný, pre záporný náboj je tok záporný. Uzavretá guľová plocha okolo bodového náboja Q sa volila pre jednoduchosť výpočtu. V prípade všeobecnej plochy okolo náboja, musí z nej vychádzať rovnaký počet siločiar ako z guľovej plochy. Ak bude náboj mimo uzavretej plochy, potom siločiary plochu buď nepretnú alebo ju pretnú dvakrát, takže celkový výtok sa bude rovnať nule. Ak sa vnútri uzavretej plochy bude nachádzať viacero nábojov, tak potom $Q = \sum_i Q_i$ predstavuje celkový náboj. Vo všeobecnosti teda vzťah (12.8) možno interpretovať: **Celkový tok vektora intenzity elektrostatického poľa ľubovoľnou uzavretou plochou sa rovná algebrickému súčtu nábojov materiálnych objektov uzavretých touto plochou, delenému permitivitou vákua.**

Aplikácie Gaussovej vety

Ako prvú aplikáciu si vypočítame intenzitu elektrostatického poľa od priameho vodiča. Uvažujeme nekonečne dlhé vlákno nabité konštantnou dĺžkovou hustotou elektrického náboja λ. Pri riešení budeme využívať valcovú symetriu, ktorá zjednodušuje výpočet. Keďže predpokladáme nekonečne dlhé vlákno, bude vektor intenzity elektrického poľa v každom bode kolmý na os vlákna (obr. 12.3). Ďalej z valcovej symetrie vyplýva, že veľkosť intenzity elektrického poľa je iba funkciou vzdialenosti $E = E(a)$. V takomto prípade je výhodné voliť Gaussovu plochu S ako valcovú plochu s polomerom a, určitou výškou

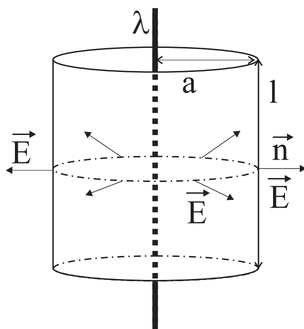
[4]KARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) bol jeden z najväčších matematikov a fyzikov všetkých čias. Zaoberal sa teóriou čísel, matematickou analýzou, geometriou, geodéziou, magnetizmom, astronómiou a optikou.

l, ktorej osou je nabité vlákno. Na podstavách tejto plochy je vektor poľa $\vec{E}$ kolmý na miestnu normálu k ploche $\mathrm{d}\vec{S}$, takže príspevok k toku elektrickej intenzity poľa je nulový. Nenulový príspevok dostaneme iba od plášťa valca, kde je vektor $\vec{E}$ v každom bode rovnobežný s normálou $\vec{n}$. Vektory $\vec{E}$ majú na tomto plášti rovnakú veľkosť a tok vektora elektrickej intenzity je podľa Gaussovej vety

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E \,\mathrm{d}S = E \oint_S \mathrm{d}S = E\, 2\, \pi\, a\, l = \frac{Q}{\varepsilon_0} \,.$$

Elektrický náboj na úseku vlákna dĺžky l môžeme vyjadriť pomocou dĺžkovej hustoty elektrického náboja vzťahom $Q = \lambda\, l$. Z tohoto pre intenzitu elektrického poľa E vo vzdialenosti a od vlákna dostávame

$$E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0\, 2\, \pi\, a} \,. \tag{12.9}$$



Obrázok 12.3: Výpočet intenzity elektrického poľa nekonečne dlhého nabitého vlákna.

Ako druhú aplikáciu si vypočítame intenzitu elektrostatického poľa homogénne nabitej dosky. Tak ako v predošlom prípade, tak aj teraz použijeme Gaussovu vetu (12.8) k výpočtu intenzity poľa v okolí nekonečne homogénnej nabitej dosky s plošnou hustotou σ. Keďže uvažujeme nekonečnú rovinu, ktorá má vo všetkých smeroch rovnaké vlastnosti, nemôže byť vektor $\vec{E}$ k rovine šikmý, ale musí byť na ňu kolmý (obr. 12.4(a)). Ďalej vzhľadom na súmernosť, musí byť intenzita poľa E na obidvoch stranách roviny rovnako veľká.

Ako Gaussovu plochu si vyberieme malý valec (obr. 12.4(a)). Tok intenzity prechádzajúci plášťom valca je nulový, keďže $\vec{E}$ je kolmá na plochu plášťa

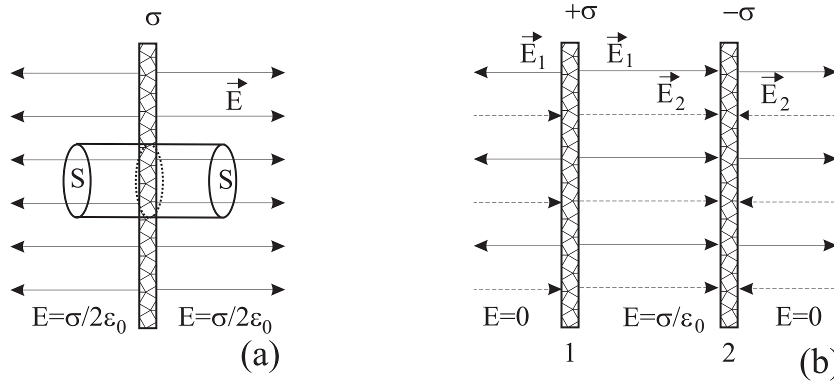
valca. Zostáva nám potom len tok dvomi podstavami daného valca, ktorý sa dá vyjadriť ako

$$T = E\,2\,S\ .$$

Náboj, ktorý sme uzavreli do valca, má hodnotu: $Q = \sigma\,S$. Spojením posledných dvoch vzťahov pomocou Gausovej vety (12.8) dostávame pre **intenzitu homogénnej nabitej dosky** vzťah

$$E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\ . \qquad (12.10)$$

Intenzita poľa E teda nezávisí od vzdialenosti od roviny a vzniká homogénne elektrické pole.



Obrázok 12.4: Priebeh intenzity elektrického poľa v okolí homogénne nabitej dosky.

Ukážme si, aká bude intenzita elektrického poľa v prípade dvoch homogénne nabitých rovín, na ktorých sa nachádzajú elektrické náboje opačnej polarity. Situáciu znázorňuje obrázok 12.4(b). Na prvej ploche je rozložený elektrický náboj s plošnou hustotou $+\sigma$ a na druhej $-\sigma$. Pre pole blízko nabitej plochy použijeme vzťah (12.10). Intenzita elektrického poľa je na roviny kolmá a jej vektor má iba zložku v smere kolmej na rovinu. Intenzitu elektrického poľa od prvej - kladne nabitej roviny označme E_1 a elektrickú intenzitu od druhej - záporne nabitej roviny označme E_2. V priestore medzi doskami majú obe intenzity rovnaký smer, takže výsledná intenzita bude súčet obidvoch a jej hodnota je

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ . \qquad (12.11)$$

V priestore mimo dosiek majú intenzity opačný smer, teda sa odčítajú a intenzita je tam nulová, keďže roviny sú nabité opačnými nábojmi čím, sa pole ruší.

V prípade, že roviny sú konečných rozmerov (napr. kondenzátor), je pole homogénne len v strednej časti a na okrajoch dochádza k rozptylu siločiar a intenzita sa mení. Vhodným usporiadaním elektród - dosiek, je možné minimalizovať rozptyl siločiar.

12.5 Práca a potenciál elektrostatického poľa

Sily elektrostatického poľa vyjadrené Coulombovým zákonom (12.2) sú matematicky analogické gravitačným silám definovaným Newtonovým zákonom (6.4), z čoho vyplýva, že na popis vlastností daného poľa sa môžu používať rovnaké veličiny. V obidvoch prípadoch ide o konzervatívne polia. Elektrostatické sily rovnako ako gravitačné sily majú tú vlastnosť, že práca nimi vykonaná, nezávisí od tvaru dráhy pohybu náboja, ale len od počiatočnej a konečnej polohy. Takže tiež definujeme skalárnu veličinu **elektrický potenciál**, pomocou ktorého charakterizujeme zase elektrostatické pole.

Majme elektrostatické pole vytvorené bodovým elektrickým nábojom Q_1 umiestneným v počiatku súradnicovej sústavy a vo vzdialenosti r_A v bode A bodový náboj Q_2. Pri presune tohto náboja do bodu $B(r_B)$ vykonáme prácu, ktorú vypočítame ako

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q_1\,Q_2}{r^3} \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} ,$$

teda

$$W = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) . \qquad (12.12)$$

Pri úprave integrovanej funkcie sme využili, že $\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = r\,\mathrm{d}r$, lebo v prípade radiálneho poľa oba vektory majú rovnaký smer.

Ak zoberieme do úvahy fakt, že silu pôsobiacu na náboj Q_2 si môžeme zapísať pomocou elektrickej intenzity náboja Q_1 ako $\vec{F}_e = Q_2\,\vec{E}$ (12.5), potom všeobecné vyjadrenie práce (12.12) má tvar

$$W = Q_2 \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \, . \qquad (12.13)$$

Elektrostatické pole má však tú pozoruhodnú vlastnosť, že práca vykonaná prenosom náboja medzi dvoma bodmi nezávisí od dráhy, po ktorej náboj prenášame, ale iba od začiatočnej a konečnej polohy prenášaného náboja. Je to práve taká dôležitá vlastnosť elektrostatického poľa, ako fakt, že toto pole je žriedlové alebo konzervatívne. Skutočnosť, že hodnota krivkového integrálu nezávisí od dráhy, nie je triviálna, a neplatí pre ľubovoľné silové pole (neplatí napr. pre sily trenia). Práca týchto síl na uzavretej dráhe je nulová, čo sa dá vyjadriť vzhľadom na predošlý vzťah ako

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \,. \qquad (12.14)$$

Tak ako v gravitačnom poli, tak aj v elektrostatickom poli si definujeme potenciálnu energiu V_p pomocou práce (12.12), ktorú musí vykonať vonkajšia sila pri premiestňovaní náboja z nekonečna do určitého miesta A. Potenciálnu energiu náboja Q_2 v elektrostatickom poli náboja Q_1 vo vzájomnej vzdialenosti r_A teda vyjadruje výraz

$$V_p(r_A) = \int_{r_A}^{\infty} \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q_1\,Q_2}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{\infty} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{r_A} \,. \qquad (12.15)$$

Prácu (12.12), ktorá sa koná pri presune bodového náboja Q_2 z bodu A do bodu B v elektrostatickom poli náboja Q_1 sa dá potom vyjadriť aj ako rozdiel potenciálnych energií v daných bodoch: $W = V_p(r_A) - V_p(r_B)$. V homogénnom elektrostatickom poli sa všetko zjednoduší, pretože v takomto poli je intenzita všade konštantná a potom pre prácu vykonanú pri prenesení náboja Q_2 o vzdialenosť d platí: $W = Q_2\,E\,d$.

Potenciálna energia náboja je skalárna veličina, ktorá jednoznačne závisí od jeho veľkosti. Je to veličina, ktorá popisuje stav náboja, ktorý sa nachádza v elektrostatickom poli iného náboja. Ak však túto veličinu budeme počítať vzhľadom na jednotkový náboj, získame veličinu, ktorá popisuje samotné elektrické pole. Touto veličinou je potenciál elektrostatického poľa náboja Q. **Potenciál φ elektrostatického poľa náboja Q definujeme ako podiel potenciálnej energie $V_p(r_A)$ bodového elektrického náboja Q_2** (12.15) **v danom mieste poľa a veľkosťou daného náboja** ako

$$\varphi(r_A) = \frac{V_p(r_A)}{Q_2} = \int_{\infty}^{r_A} \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r_A} \;, \qquad (12.16)$$

čo je potenciálová funkciu v okolí bodového náboja. Ak si uvedomíme, že výraz v integráli v predošlom vzťahu je veľkosť intenzity elektrostatického poľa

náboja Q (12.3), potom sa dá zapísať **potenciál elektrostatického poľa pomocou intenzity elektrostatického poľa** ako

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \,. \tag{12.17}$$

Tento vzťah platí pre akúkoľvek intenzitu elektrostatického poľa sústavy bodových nábojov či nabitého telesa.

Bodom, v ktorých má elektrický potenciál rovnakú hodnotu hovoríme **ekvipotenciálne hladiny**, podobne ako v gravitačnom poli. Pri prenášaní náboja po ekvipotenciálnej hladine sa nekoná práca. Intenzita elektrostatického poľa je kolmá na ekvipotenciálnu hladinu v každom bode. Ekvipotenciálne hladiny - v reze ekvipotenciálne čiary a siločiary tvoria navzájom ortogonálne trajektórie. V elektrickom poli bodového náboja alebo rovnomerne nabitej gule sú ekvipotenciálnymi čiarami sústredné kružnice, resp. guľové vrstvy v prípade trojrozmerného pohľadu. V homogénnom poli tvoria tieto čiary sústavu rovnobežiek kolmých na siločiary.

12.6 Vzťah intenzity a potenciálu elektrostatického poľa

V predchádzajúcom odseku bolo uvedené, že intenzita a potenciál elektrostatického poľa navzájom súvisia integrálnym vzťahom (12.17). S podobným vyjadrením sme sa už stretli v gravitačnom poli medzi potenciálom a intenzitou gravitačného poľa (6.10). Inverzné vyjadrenie sme vyjadrili pomocou gradientu (6.14). Keďže v prípade elektrostatického poľa matematicky ide formálne o ten istý vzťah ako v gravitačnom poli, môžeme použiť rovnaké odvodenie. Teda platí, že **intenzita elektrostatického poľa je rovná zápornému gradientu potenciálu**

$$\vec{E} = -\nabla\varphi(\vec{r}) \,. \tag{12.18}$$

Gradient skalárnej funkcie je vektorová funkcia, ktorej hodnota v každom bode poľa sa rovná maximálnej zmene skalárnej funkcie na jednotku dĺžky v danom bode a má smer jej maximálneho rastu.

12.7 Elektrické napätie

Rozdiel potenciálov $\varphi_B - \varphi_A$ medzi dvoma miestami A a B nazývame **elektrickým napätím**. Ako vidieť zo vzťahu (12.17), pre elektrické napätie

platí vzťah

$$U = \Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} \,. \qquad (12.19)$$

Elektrické napätie medzi dvoma bodmi elektrostatického poľa sa rovná práci na prenesenie jednotkového kladného elektrického náboja medzi týmito bodmi elektrostatického poľa. Jednotka napätia je rovnaká ako jednotka potenciálu, teda 1 **volt** [5] (V). S využitím tohto vzťahu môžeme tiež definovať prácu potrebnú na priemestnenie náboja Q_2 z jedného bodu do druhého ako súčin napätia (rozdielu potenciálu daných bodov) a daného náboja: $W = U\,Q_2$.

12.8 Elektrický dipól

Druhým dôležitým systémom nábojov je dvojica bodových nábojov uložených v istej vzájomnej vzdialenosti d. Intenzita poľa v ľubovoľnom bode priestoru je daná superpozíciou polí dvoch nábojov a matematicky súčtom dvoch výrazov typu (12.3). Najjednoduchšie pole vytvárajú dvojice v absolútnej hodnote rovnako veľkých nábojov, pričom najčastejšie používaná je dvojica rovnako veľkých nábojov opačného znamienka, ktorú nazývame **elektrický dipól.** Kvôli zjednodušeniu si ukážeme len charakteristické črty poľa elektrického dipólu. Elektrický dipól popisujeme elektrickým dipólovým momentom $\vec{p} = Q\,\vec{d}$, pričom smer dipólového momentu je od záporného ku kladnému náboju. Pre výsledný elektrický potenciál dipólu platí:

$$\varphi_{dip} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\,. \qquad (12.20)$$

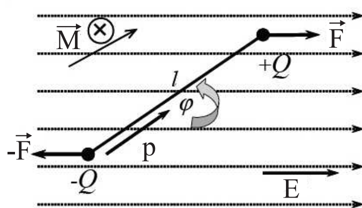
Na rozdiel od elektrického potenciálu bodového elektrického náboja, ktorý klesá nepriamoúmerne prvej mocnine vzdialenosti od elektrického náboja, elektrický potenciál dipólu klesá s druhou mocninou vzdialenosti od stredu dipólu.

Vzťah pre intenzitu poľa bodového dipólu nájdeme pomocou vzťahu (12.18), t. j. vypočítaním gradientu vzťahu (12.20). Teda intenzita elektrického poľa dipólu má tvar

$$\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)\,. \qquad (12.21)$$

[5] ALESSANDRO VOLTA (1745 – 1827) taliansky vynálezca, fyzik a venoval sa elektrine. Vytvoril ako prvý galvanickú batériu, ktorá dostala pomenovanie Voltov článok.

Vo výrazoch pre elektrickú intenzitu je treba si všimnúť, že intenzita elektrického poľa dipólu klesá úmerne s treťou mocninou vzdialenosti od stredu dipólu. Podrobnejšou analýzou by sme dospeli k tomu, že intenzita elektrického dipólu pre $r >> l$ v smere kolmom na dipól má pri rovnakej vzdialenosti práve polovičnú hodnotu ako na osi dipólu. V chemických štruktúrach sa často stretávame s dipólmi, ktoré vznikajú v molekulách. Takáto molekula potom nadobúda elektrický dipólový moment a polaritu. Napríklad molekula vody je polárna a má elektrický dipólový moment $p_{H_2O} = 6.17 \times 10^{-30}\, C.m$.



Obrázok 12.5: Dipól v homogénnom elektrickom poli.

Predpokladajme, že máme teraz elektrický dipól v homogénnom elektrickom poli $\vec{E}$ (obr. 12.5). Sily poľa pôsobiace na elektrické náboje tvoria dvojicu síl. Pre moment pôsobiacej dvojice síl platí

$$\vec{M} = \vec{l} \times Q\,\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}\ . \tag{12.22}$$

Dvojica síl sa snaží dipól natočiť, a to tak, aby vektor elektrického dipólového momentu mal smer siločiar elektrického poľa. Takáto orientácia dipólu v homogénnom elektrickom poli zodpovedá stabilnej polohe. Ak je voľný, zorientuje sa tak, že os dipólu l je rovnobežná so smerom $\vec{E}$. Pri pružnom upnutí sa iba vychýli zo základnej polohy o nejaký uhol, určený rovnováhou momentu sily od vonkajšieho poľa a momentu väzby. Vo vhodnom elektrickom poli sa kúsky papiera, vlasy alebo drobné predmety stávajú dipólmi, zorientujú sa v smere siločiar a sú potom priťahované k zdroju elektrického poľa (napr. nabitá sklenená tyč.)

12.9 Pohyb nabitej častice v elektrickom poli

Preskúmajme teraz pohyb nabitej častice s hmotnosťou m a nábojom q v homogénnom elektrickom poli. Z praktického hľadiska sú zaujímavé dva

prípady pohybu častice v pozdĺžnom a priečnom elektrickom poli. Smer elektrického poľa vzťahujeme vzhľadom na smer rýchlosti častice.

V prípade vstupu častice **rovnobežne s elektrickým poľom** v mieste s potenciálom φ_1 sa v dôsledku pôsobenia elektrostatickej sily náboj dostane do miesta s potenciálom φ_2. Pri tomto presune sa zvyšuje aj rýchlosť danej častice z rýchlosti v_0 na rýchlosť v. Pre zmenu kinetickej energie častice potom platí:

$$\frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = q\,(\varphi_2 - \varphi_1) = q\,U\;. \tag{12.23}$$

Častica sa ďalej pohybuje v pôvodnom smere. Ak by $v_0 = 0\,m/s$ potom rýchlosť pro prejdení potenciálového rozdielu U je: $v = \sqrt{2\,q\,U/m}$.

Pri vstupe častice **kolmo na elektrické pole** môžeme na základe II. Newtonovho zákona písať pre silu pôsobiacu na náboj vzťah:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\,\vec{a} = q\,\vec{E}\;, \\ F_x &= m\,a_x = m\frac{dx^2}{dt} = 0\;, \\ F_y &= m\,a_y = m\frac{dy^2}{dt} = q\,E\;. \end{aligned}$$

Postupnou integráciou podľa času dostaneme zložky rýchlosti a súradnice polohy častice v ľubovoľnom čase t. Výsledné vzťahy sú

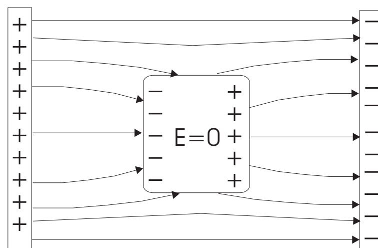
$$\begin{aligned} v_x &= v_0, & x &= v_0\,t, \\ v_y &= \frac{q\,E}{m}t, & y &= \frac{1}{2}\frac{q\,E}{m}t^2. \end{aligned}$$

Častica sa bude pohybovať po parabolickej dráhe.

12.10 Elektrostatická indukcia

Elektrické vodiče sú látky, ktoré obsahujú veľký počet častíc s nábojom, ktoré sa môžu v nich voľne pohybovať. Tieto častice nazývame **voľné častice s nábojom**. V kovových vodičoch (napr. meď, hliník, striebro) sú to voľné elektróny, v kvapalinových vodičoch (elektrolyty, roztoky solí) sú to kladné a záporné ióny. Tieto voľné častice sa vo vodičoch ustavične a neusporiadane pohybujú. Preto je vo vodiči, ktorý nie je nabitý a nie je vo vonkajšom elektrickom poli, ich rozloženie také, že v ľubovoľnej časti vodiča je celkový náboj nulový.

Zmena rozloženia voľných nosičov náboja nastane, ak vložíme nenabitý vodič do elektrického poľa. Tomuto prerozdeleniu nábojov hovoríme **elektrostatická indukcia**. **Pri tomto jave sa protiľahlé časti povrchu vodiča vloženého do elektrického poľa nabijú elektrickým nábojom s rovnakou veľkosťou, ale opačným znamienkom. Takto prerozdelené elektrické náboje na povrchu vodiča nazývame indukované náboje.** Keď vodič vyberieme z elektrického poľa, elektrická indukcia zanikne. Vodič sa vráti do pôvodného rovnovážneho stavu.



Obrázok 12.6: Vodič v elektrostatickom poli.

Vo všeobecnosti môžeme povedať, že elektrické náboje sa vo vodičoch prerozdelia tak, aby kompenzovali účinok vonkajšieho elektrického poľa pôsobiaceho na vodič. Toto prerozdelenie spôsobuje vznik indukovaných nábojov na povrchu vodiča, čoho výsledkom je zmena elektrického vonkajšieho poľa a tvaru siločiar. Schematicky je to znázornené na obrázku 12.6. Na záporne nabitej strane vodiča siločiary vstupujú do vodiča a opäť vystupujú na kladne nabitom povrchu vodiča (obr. 12.6). Intenzita elektrického poľa od indukovaných nábojov má opačný smer ako intenzita vonkajšieho elektrického poľa. Po dosiahnutí výsledného ustáleného stavu je intenzita elektrického poľa vo vnútri vodiča nulová. Prerozdelenie elektrických nábojov vo vodičoch nie je okamžité, prebieha s veľmi krátkym časovým intervalom 10^{-12} až 10^{-14} s.

Vzhľadom na to, že intenzita je vo vnútri vodiča nulová, vnútro vodičov je dokonale tienené pred účinkom vonkajších statických elektrických polí. Tento jav sa využíva na elektrické tienenie citlivých zariadení (niektoré meracie prístroje, vstupné diely rozhlasových a televíznych prijímačov a pod.), ale aj na ochranu pred elektrickým výbojom - Faradayova klietka. Kovová karoséria auta je takým príkladom bezpečného útočiska pred prípadným úderom blesku. Ďalším príkladom jednoduchej ukážky Faradayovej klietky je nedostupnosť mobilného telefónu zabaleného do alobalu.

12.11 Kapacita vodiča a kondenzátora

Dôležitou vlastnosťou vodiča, sústavy vodičov a telies je schopnosť akumulovať elektrický náboj. Táto vlastnosť má veľké praktické využitie v prvkoch elektrických obvodov a zariadení, ktoré voláme kondenzátory. Pri nabíjaní vodičov zistíme, že rôzne telesá nabité rovnakým nábojom majú rôzny potenciál. Tento potenciál závisí od veľkosti a tvaru telesa, vzdialenosti od ostatných telies ako i prostredia, v ktorom sú uložené. **Potenciál každého telesa je v bežných prostrediach priamoúmerný náboju $\varphi = C\,Q$.** Konštantu úmernosti C, ktorá charakterizuje schopnosť hromadiť istý elektrický náboj, nazývame **kapacita**. Kapacitu vodiča možno definovať vzťahom

$$C = \frac{Q}{\varphi} \,. \tag{12.24}$$

Jednotkou kapacity v sústave SI je **farad** (F). Jeden farad je kapacita vodiča, ktorý sa nábojom $1\,C$ nabije na potenciál $1\,V$. V technickej praxi sa kapacita meria v menších jednotkách. Sú to $1\,\mu F = 10^{-6}\,F$, $1\,nF = 10^{-9}\,F$, $1\,pF = 10^{-12}\,F$.

Kapacita osamotených vodičov je veľmi malá. Napríklad guľový vodič ($C = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R$) s polomerom $9\,cm$ vo vákuu má kapacitu len $10\,pF$. Väčšiu kapacitu má sústava dvoch navzájom izolovaných vodičov, ktorú nazývame **kondenzátor**. Pokiaľ majú spomínané vodiče rovnako veľké náboje opačných znamienok, hovoríme, že kondenzátor je nabitý. Jeho kapacitu určíme zo vzťahu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} \,, \tag{12.25}$$

kde U je napätie medzi vodičmi s potenciálmi φ_1 a φ_2. V zásade rozlišujeme tri druhy kondenzátorov: doskový, guľový a valcový, pričom každý z nich má svoje modifikácie.

12.12 Kapacita doskového kondenzátora

Jednoduchým kondenzátorom je **doskový kondenzátor**, ktorý je znázornený na obrázku 12.4(b). Tvoria ho dve rovinné kovové platne s plochou S vzdialené o d. Predpokladajme, že na doskách kondenzátora je náboj Q rovnomerne rozložený po povrchu dosiek s plošnou hustotou $\sigma = Q/S$. Elektrické pole medzi doskami môžeme považovať za homogénne s intenzitou

$E = \sigma/\varepsilon_0$ (12.11) a nehomogenity na okrajoch dosiek zanedbávame. Zo vzťahu pre potenciálový rozdiel (12.19) v prípade homogénneho poľa sa dá napätie medzi doskami vyjadriť ako

$$U = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}r = E\, d = \frac{Q\, d}{\varepsilon_0\, S}\ . \tag{12.26}$$

Po dosadení do (12.25) sa **kapacita doskového kondenzátora** rovná

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\ . \tag{12.27}$$

Elektrická kapacita doskového kondenzátora je priamoúmerná plošnému obsahu dosiek a nepriamoúmerná vzájomnej vzdialenosti dosiek.

Z vykonaného postupu určenia kapacity doskového kondenzátora sa dá formulovať "návod", ako určiť elektrickú kapacitu iného usporiadania vodičov.

- Najprv stanovíme rozloženie elektrického náboja.
- Vypočítame intenzitu elektrického poľa, napr. pomocou Gaussovej vety (12.8).
- Vyjadríme napätie pomocou vzťahu (12.19).
- Zo známeho napätia a náboja vypočítame kapacity podľa vzťahu (12.25).

12.13 Spájanie kondenzátorov

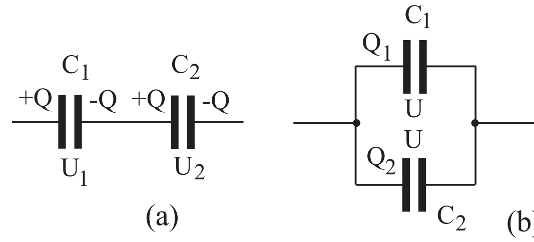
Väčšina kondenzátorov má hodnoty kapacít stále. Požadované hodnoty kapacít dosahujeme rôznym spájaním kondenzátorov. Najjednoduchšie prípady spojenia sú paralelné (spojenie vedľa seba) a sériové zapojenie (spojenie za sebou). Pri **sériovom zapojení** dvoch kondenzátorov s kapacitami C_1 a C_2 (obr. 12.7(a)) majú náboje na obidvoch kondenzátoroch rovnakú veľkosť $Q = C_1\, U_1$ a $Q = C_2\, U_2$, kde U_1 a U_2 sú napätia medzi platňami kondenzátorov.

Z obrázku 12.7(a) vyplýva, že pri sériovom zapojení kondenzátorov je celkové napätie $U = U_1 + U_2$. Zo vzťahu pre kapacitu (12.25) a po nasledujúcej úprave dostaneme pre výslednú kapacitu dvoch kondenzátorov zapojených sériovo vzťah

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\ . \tag{12.28}$$

Pri **paralelnom zapojení** dvoch kondenzátorov s kapacitami C_1 a C_2 (obr. 12.7(b)) vzniká vlastne kondenzátor s väčšou účinnou plochou platní, čiže s väčšou kapacitou. Napätie U medzi platňami oboch kondenzátoroch je síce rovnaké, ale náboje na nich sú rôzne $Q_1 = C_1 U$ a $Q_2 = C_2 U$. Celkový náboj na sústave dvoch kondenzátorov je $Q = Q_1 + Q_2$ a zo vzťahu $Q = C U$ je zrejmé, že výsledná kapacita dvoch kondenzátorov zapojených paralelne je

$$C = C_1 + C_2 \,. \tag{12.29}$$



Obrázok 12.7: Sériové (a) a paralelné (b) zapojenie kondenzátorov.

V prípade zapojenia viacerých kondenzátorov sériovo alebo paralelne platia obdobné vzťahy ako (12.29 a 12.28) s daným počtom kondenzátorov

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\,, \quad C = \sum_{i=1}^{n} C_i \,. \tag{12.30}$$

12.14 Energia elektrostatického poľa

Na vytvorenie sústavy dvoch alebo viacerých nábojov musíme vykonať prácu spojenú s prekonaním odpudivých či príťažlivých síl pôsobiacich medzi nimi. Pod energiou danej sústavy budeme potom rozumieť veľkosť práce, ktorú sme spotrebovali na jej vytvorenie. Vytvorme na začiatok sústavu dvoch bodových nábojov. Práca, ktorú musíme vykonať je rovná práci (12.12) potrebnej na premiestnenie jedného bodového náboja Q_2 z nekonečna k náboju Q_1 do vzdialenosti r_{12}, ktorá je medzi týmito nábojmi. Táto práca zodpovedá potenciálnej energii daných bodových nábojov definovanej podľa vzťahu (12.15).

Pre potenciál elektrického poľa φ_1 prvého náboja v poli druhého a pre potenciál φ_2 druhého náboja v poli prvého náboja môžeme na základe vzťahu (12.16) písať:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_{12}}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_{21}}\,.$$

Výsledná **energia dvoch nábojov** je potom daná vzťahom

$$E = \frac{1}{2}(Q_1\,\varphi_1 + Q_2\,\varphi_2)\ . \qquad (12.31)$$

Pre sústavu n bodových nábojov by sme postupným pridávaním nábojov dostali vzťah

$$E = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\,\varphi_i\ , \qquad (12.32)$$

kde symbolom φ_i sme označili potenciál elektrického poľa vytvoreného ostatnými elektrickými nábojmi sústavy v bode, v ktorom sa nachádza náboj Q_i.

Energia kondenzátora

Pri výpočte energie nabitého kondenzátora postupujeme rovnakým spôsobom ako v predošlom prípade. Majme kondenzátor kapacity C, na ktorom je náboj Q, a teda napätie medzi doskami kondenzátora je $U = Q/C$. Na to, aby sme zväčšili náboj kondenzátora o hodnotu dq (z kladnej dosky prenesieme tento náboj na zápornú dosku), musíme vykonať elementárnu prácu $\mathrm{d}W = U\,dq$. Aby sme nabili nenabitý kondenzátor na hodnotu Q, musíme vykonať prácu

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\ , \qquad (12.33)$$

ktorá je rovná **energii nabitého kondenzátora**

$$E = \frac{1}{2}\,Q\,U = \frac{1}{2}\,C\,U^2\ . \qquad (12.34)$$

13 Elektrostatické javy v dielektrikách

13.1 Polarizácia dielektrika

Elektricky nevodivá látka, izolant alebo dielektrikum, obsahuje nosiče náboja podobne ako vodič. No vo vodiči sú nosiče náboja pohyblivé, zatiaľčo v dielektriku sú nabité častice viazané na pevné miesto a nemôžu sa vplyvom elektrického poľa premiestňovať. Vplyvom elektrického poľa sa dielektrikum polarizuje, stane sa elektrickým dipólom. Z makroskopického hľadiska sa polarizácia prejaví tak, že na povrchu dielektrika sa objaví **viazaný náboj,** vnútri sa náboje vzájomne zrušia. Tento elektrický náboj nemôžeme priamo merať, nemôžeme ho ani odobrať, preto sa preň používa názov viazaný elektrický náboj. Je to elektrický náboj, ktorý je súčasťou atómov, resp. molekúl daného dielektrika. Výsledkom polarizácie je, že v dielektriku je menšie elektrické pole, ako pole, čo ho vyvolalo.

Urobme si pokus s rovinným vzduchovým kondenzátorom. Ak nabijeme kondenzátor nábojom Q bude medzi doskami napätie U. Kapacita takéhoto kondenzátora je potom C_0 (12.27). Ak do kondenzátora teraz vložíme dielektrikum, zistíme, že kapacita kondenzátora sa zvýši. Ako kvantitatívny parameter na vyjadrenie parametrov dielektrík definoval Faraday **relatívnu permitivitu** ε_r ako pomer kapacity kondenzátora C vyplneného dielektrikom a kapacity C_0 toho istého vákuového (vzduchového) kondenzátora

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}\,. \tag{13.1}$$

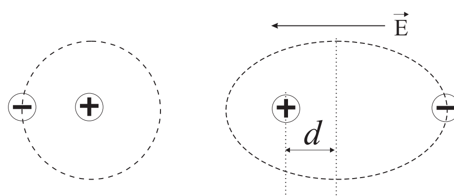
Jej hodnota závisí od druhu dielektrika a aj od jeho stavu. Niektoré hodnoty relatívnej permitivity sú uvedené v tabuľke 13.1.

Dielektrikum sa skladá z atómov a molekúl a tie z elektricky nabitých častíc

Tabuľka 13.1: Hodnoty relatívnej permitivity pre niektoré dielektriká.

Dielektrium	ϵ_r	Dielektrium	ε_r
vákuum	1	polystyrén	2,4
vzduch	1,006	plexisklo	3,4 - 4
teflón	2,1	sklo	5 - 8
porcelán	5,5 - 6,5	voda	81,6

- elektrónov a kladných jadier. Kladné a záporné náboje atómov sa navzájom kompenzujú, takže atóm ako celok je elektricky neutrálny. Pohyb atómov je viazaný na vzdialenosti rádovo desiatky nanometrov. Vplyvom silového pôso-

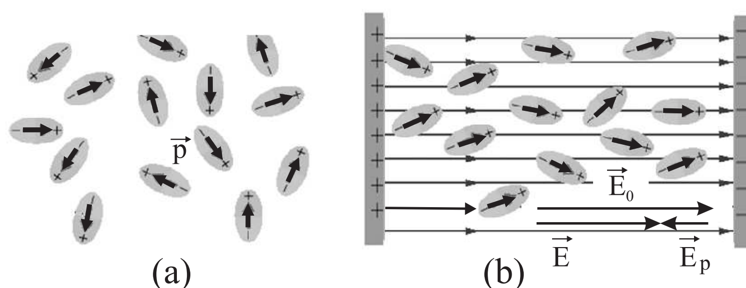


Obrázok 13.1: Polarizácia atómu v elektrostatickom poli.

benia vonkajšieho elektrického poľa sa kladné jadro posunie v smere intenzity elektrického poľa E a elektróny atómového obalu sa posunú opačným smerom (obr. 13.1). Pri polarizácii atómov hovoríme o **atómovej polarizácii**. Výsledkom je vznik **elektrického dipólu** s nábojom $+Q$ (náboj jadra) a $-Q$ (celkový náboj elektrónov), ktoré sú vo vzdialenosti d (kapitola 12.8 Elektrický dipól). Elektrický moment tohto dipólu je $p = Q\,d$. Táto hodnota je úmerná intenzite vonkajšieho poľa, pretože s intenzitou rastie úmerne i vzdialenosť d.

K podobnému efektu dochádza i v prípade molekuly vo vonkajšom elektrickom poli. Tu však musíme rozlišovať molekuly, ktoré sa svojou stavbou podobajú atómom a bez prítomnosti vonkajšieho poľa nemajú žiadny elektrický dipólový moment - **nepolárne molekuly** (napr. molekula vodíka, kyslíka a dusíka). Polarizácia týchto molekúl prebieha podobne ako atómová polarizácia. Na druhej strane existujú molekuly, ktoré svojou nesymetrickou stavbou sa vyznačujú elektrickým dipólovým momentom a nazývame ich **polárne molekuly** (napr. HCl, H_2O, C_2H_5OH a pod.). Bez vonkajšieho elektrického poľa sa orientácia polárnych molekúl vplyvom zrážok neustále mení a stredná hodnota výsledného elektrického dipólového momentu molekúl sa rovná nule (obr. 13.2(a)). Vplyvom vonkajšieho poľa sa hlavne zmení dĺžka

dipólu, takže sa zväčší aj jej elektrický dipólový moment o určitú hodnotu. Vo vonkajšom elektrickom poli na každý dipól pôsobí otáčavý moment (12.22), ktorý sa ho snaží natočiť v smere intenzity (obr. 13.2(b)). Vplyvom tepelného pohybu molekúl je tento účinok marený, a preto je možný len istý stupeň **orientačnej polarizácie.** V prípade dostatočnne silného elektrického poľa sa natočia elektrické dipólové momenty všetkých molekúl do smeru elektrického poľa a orientačná polarizácia sa už nedá ďalej zvyšovať. Z teórie vyplýva, že stredná hodnota polarizácie polárneho dielektrika je nepriamoúmerná teplote. Čím je teplota vyššia, tým viac bude chaotický tepelný pohyb prekážať orientácii molekulárnych dipólov a polarizácia bude menšia.



Obrázok 13.2: Polárne dielektrikum (a) bez prítomnosti a (b) orientované v smere elektrostatického poľa E_0 (E_p - elektrické pole vzniknuté vplyvom polarizácie, E - výsledné elektrické pole v dielektriku).

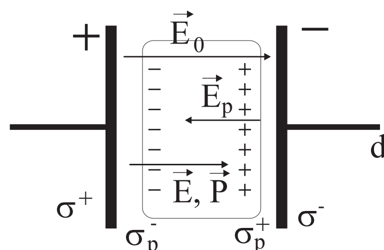
Opísané javy v predošlom odseku sa súhrne nazývajú polarizácia dielektrika. Na kvantitatívne charakterizovanie polarizácie v určitom bode dielektrika definujeme **vektor polarizácie** vzťahom

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} , \tag{13.2}$$

kde $\sum_i \vec{p}_i$ predstavuje vektorový súčet všetkých elementárnych elektrických dipólových momentov nachádzajúcich sa v danom objemovom elemente ΔV dielektrika. Vektor polarizácie je funkciou priestorových súradníc a v dielektriku je definované pole tohto vektora. Jeho rozmer je $(C/m^2 = A.s/m^2)$. Polarizácia dielektrika sa prejavuje ako existenciou viazaného náboja na povrchu dielektrika (obr. 13.3). Ak označíme plošnú hustotu viazaného náboja σ_p, potom normálová zložka vektora polarizácie k zvolenej ploche na povrchu alebo vo vnútri dielektrika sa rovná plošnej hustote viazaného náboja σ_p

$$P_n = \sigma_p . \tag{13.3}$$

13.2 Elektrické pole v dielektriku



Obrázok 13.3: Kondenzátor s dielektrikom.

Pre správne pochopenie vzniku elektrického poľa v dielektriku si dôkladnejšie preberieme prípad dielektrickej platne medzi doskami rovinného kondenzátora. Ak vzduchový kondenzátor kapacity C_0 pripojíme k zdroju napätia potom sa na jeho elektródach nahromadí **voľný elektrický náboj** $Q_0 = C_0\,U$ s plošnou hustotou $\sigma_0 = Q_0/S$. Voláme ho voľný náboj preto, lebo je to elektrický náboj, ktorý môžeme priviesť alebo odobrať, teda aj priamo merať. Intenzita elektrického poľa v kondenzátore bude

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\,. \tag{13.4}$$

Po vložení dielektrika (13.1) hrúbky d, ktoré vypĺňa celý priestor kondenzátora, zvýši sa jeho kapacita z C_0 na

$$C = \varepsilon_r\,C_0 = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\frac{S}{d}\,. \tag{13.5}$$

Na okrajoch dielektrika vznikne viazaný náboj σ_p opačného znamienka ako voľný náboj na elektróde. Viazaný náboj bude vytvárať nové elektrické pole opačného smeru (E_p) ako to, čo ho vyvolalo (obr. 13.3). Elektrické pole v dielektriku je superpozíciou dvoch polí, a to vonkajšieho poľa od voľného elektrického náboja E_0 a elektrického poľa od viazaného elektrického náboja $E_p = \sigma_p/\varepsilon_0$. Výsledné elektrické pole v dielektriku je

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \qquad E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0}\,. \tag{13.6}$$

V dôsledku toho je vo vnútri dielektrika intenzita E výsledného poľa menšia ako intenzita vonkajšieho poľa. Jej hodnota sa dá vyjadriť pomocou relatívnej permitivity ako

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}\,. \tag{13.7}$$

Na základe predošlých vzťahov a zavedením novej konštanty **elektrickej susceptibility** $\kappa = \varepsilon_r - 1$ sa dá veľkosť elektrického poľa od viazaných nábojov v dielektriku vyjadriť nasledujúco

$$E_p = \kappa \, E_0 \, . \tag{13.8}$$

Ďalšími úpravami sa dá ukázať, že plošná hustota viazaného náboja sa dá vyjadriť ako

$$\sigma_p = P = \sigma_0 \, (\varepsilon_r - 1) = \varepsilon_0 \, \kappa \, E \, . \tag{13.9}$$

Coulombov zákon (12.2) sme si definovali pre dva elektrické náboje umiestnené vo vákuu. Pokiaľ sú náboje umiestnené v dielektrickom prostredí, situácia sa mierne skomplikuje, lebo elektrický náboj vytvára elektrické pole, ktoré následne polarizuje okolité dielektrikum. Výslednú silu dokážeme spočítať pomocou Gaussovej vety (12.8), určenia viazaného náboja (13.9) a nakoniec informácie, že intenzita v dielektriku (13.7) je ε_r-krát menšia. Teda sila medzi dvoma nábojmi v dielektriku sa počíta pomocou Coulombovho zákona deleného relatívnou permitivitou dielektrika, čiže

$$\vec{F_e} = \frac{1}{4 \, \pi \, \varepsilon_0 \, \epsilon_r} \frac{Q_1 \, Q_2}{r^3} \vec{r} \, . \tag{13.10}$$

13.3 Vektor elektrickej indukcie a energia elektrického poľa

Okrem vektora intenzity elektrického poľa $\vec{E}$ a polarizácie $\vec{P}$ je pre elektrické pole definovaný aj **vektor elektrickej indukcie** $\vec{D}$. Pomocou tohto vektora sa dá jednoduchšie vyjadriť elektrické pole v dielektriku. Definovaný je vzťahom

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \, \vec{E} + \vec{P} \, . \tag{13.11}$$

Rozmer D je (C/m^2). Z predchádzajúcich úvah vieme, že polarizácia $\vec{P}$ odpovedá plošnej hustote viazaného náboja σ_p (13.3). Teda vektor polarizácie sa dá zapísať ako $\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \, \vec{E}$ (13.9). Zavedením označenia $\varepsilon = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r$ sa dá vzťah (13.11) zjednodušene zapísať nasledujúco

$$\vec{D} = \varepsilon \, \vec{E} \, . \tag{13.12}$$

Táto rovnica patrí medzi materiálové rovnice Maxwellových rovníc.

Vo vákuu, v ktorom nie sú iné atómy alebo nosiče náboja, je $\vec{P} = \vec{0}\, C/m^2$ a z definície (13.12) zostáva iba tvar

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \, \vec{E} \, . \tag{13.13}$$

Štúdiom procesu nabíjania kondenzátora sme ukázali, že energia nabitého kondenzátora s elektrickou kapacitou C, na ktorého doskách je napätie U, je daná vzťahom $W = C\, U^2/2$ (12.34). Majme doskový kondenzátor s plochou dosiek S, vzdialených o d a nech priestor kondenzátora je plne vyplnený dielektrikom relatívnej permitivity ε_r. Po dosadení vyjadrenia elektrickej kapacity (13.5) a napätia $U = E\, d$ dostávame pre energiu nabitého kondenzátora s dielektrikom vzťah

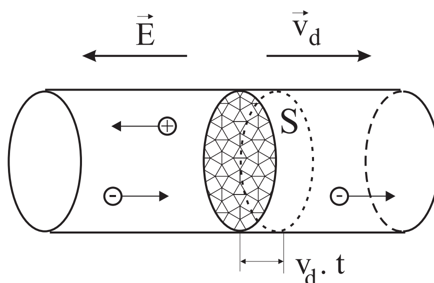
$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r\, \varepsilon_0\, S}{d}(E\, d)^2 = \frac{1}{2}E(\varepsilon\, E)(S\, d) \\ W &= \frac{1}{2}E\, D\, V = w_e\, V \, , \end{aligned}$$

kde sme zaviedli hustotu energie elektrického poľa v materiálovom prostredí ako $w_e = \frac{1}{2}\, E\, D$, pričom objem kondenzátora je $V = S\, d$. Vo vektorovom tvare pre **hustotu energie elektrického poľa** platí všeobecný vzťah

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} \, . \tag{13.14}$$

14 Elektrický prúd

V predchádzajúcej kapitole Elektrické pole sme preberali elektrostatické polia nábojov, ktoré boli v pokoji. V tejto kapitole sa budeme zaoberať pohybom elektrických nábojov, ktorý budeme volať elektrický prúd. Pod elektrickým nábojom budeme rozumieť nabitú časticu ako elektrón, protón, kladný alebo záporný ión atď. Prostredie, v ktorom sa môžu pohybovať takéto častice, voláme vodičom elektrického prúdu. Voľnými časticami v kovovom vodiči sú záporné elektróny, v elektrolytoch sú to kladné a záporné ióny, v plyne môže ísť o pohyb ako kladných a záporných iónov, tak aj elektrónov, v polovodiči hovoríme o pohybe elektrónov a "dier". Postupne si preberieme všeobecné zákonitosti platné pre elektrické prúdy v iba kovových vodičoch.



Obrázok 14.1: Pohyb nabitých častíc vo vodiči.

V kovovom vodiči sa vždy nachádzajú voľne nabité častice - elektróny. Ak sa tento vodič nachádza v elektrickom poli $\vec{E}$, potom na každý elektrón pôsobí elektrická sila $\vec{F} = q\,\vec{E}$ (12.5). Táto sila spôsobuje usmernený pohyb elektrónov v protismere intenzity elektrického poľa a hovoríme, že tečie elektrický prúd. Pretože nabité častice sú dvojakého druhu, definujeme **smer elektrického prúdu: kladne nabité častice sa pohybujú v smere elektrického poľa a záporne nabité častice ako elektróny opačným smerom (obr. 14.1).**

Pod smerom prúdu rozumieme vždy smer pohybu kladne nabitých častíc. Platí to i v prípade, že prúd tvoria len voľné elektróny, teda v príprade prúdu v kovových vodičoch.

Elektrický prúd je fyzikálna veličina, ktorá **udáva množstvo náboja, ktorý pretečie prierezom vodiča za jednotku času**

$$I = \frac{dQ}{dt} \ . \tag{14.1}$$

Jednotka elektrického prúdu je *ampér*[1] (A) a patrí medzi základné jednotky SI sústavy (definíciu uvedieme v časti 15.5 Definícia ampéru).

Voľné elektróny sa vo vnútri kovového vodiča pohybujú všeobecne po krivočiarej trajektórii. Tento pohyb je chaotický a je daný zrážkami s inými elektrónmi alebo atómami tvoriacimi mriežku vodiča. Ako už bolo povedané, po vložení elektrického vodiča do vonkajšieho elektrického poľa intenzity $\vec{E}$ začne pôsobiť na elektróny elektrická sila $\vec{F} = e\,\vec{E}$. Vplyvom tejto sily a neustálych zrážok vznikne usmernený pohyb voľných elektrónov, ktorého priemernú rýchlosť označujeme ako **driftová rýchlosť** v_d. Driftová rýchlosť je zanedbateľná v porovnaní s rýchlosťou chaotického pohybu. (Napríklad v medenom vodiči v domácej inštalácii je driftová rýchlosť elektrónov maximálne $10^{-5}\,m/s$, zatiaľ čo rýchlosť chaotického pohybu je asi $10^6\,m/s$.) Elementárny náboj, ktorý prejde cez plochu vodiča S pri "usmernenom" pohybe za časový úsek dt sa dá potom vyjadriť ako: $dQ = n\,e\,v_d\,dt\,S$. Ak použijeme toto vyjadrenie vo vzťahu (14.1), môžeme pre elektrický prúd písať

$$I = \frac{dQ}{dt} = n\,e\,v_d\,S \ . \tag{14.2}$$

Ako vidíme, elektrický prúd je priamoúmerný driftovej rýchlosti v_d, prierezu vodiča S, náboju elektrónu e a počtu voľných elektrónov v jednotke objemu n. Množstvo voľných elektrónov, ktoré sa nachádzajú v jednotke objemu vodiča označujeme ako **objemová hustota náboja** $\rho = n\,e$ (C/m^3). Pre kladné nosiče náboja je hustota náboja kladná a pre záporné náboje je záporná.

[1]ANDRÉ MARIE AMPÉRE (1775 – 1836), francúzky matematik a fyzik. Je zakladateľom elektrodynamiky. Zaoberal sa matematikou, jeho hlavným vedeckým prínosom sú objavy v oblasti elektromagnetizmu. Definoval elektrický prúd a jeho smer, zaviedol označenie severného a južného pólu.

14.1 Hustota elektrického prúdu

Elektrický prúd je skalárnou veličinou a popisuje celkový prúd vo vodiči. Aby bolo možné charakterizovať nielen veľkosť elektrického prúdu, ale aj jeho smer (orientáciu), zavádza sa vektorová veličina – **hustota elektrického prúdu** $\vec{J}$. Veľkosť hustoty elektrického prúdu je rovná elektrickému prúdu, ktorý prechádza plochou S kolmou na smer pohybu častíc, podeleného veľkosťou tejto plochy. Definičný vzťah pre túto veličinu je

$$J = \frac{I}{S} \, . \tag{14.3}$$

Jednotka prúdovej hustoty je (A/m^2).

Prúd dI pretekajúci elementárnou plôškou sa dá vyjadriť ako $\vec{J} \cdot d\vec{S}$, kde $d\vec{S}$ je vektor elementu plochy. Celkový prúd celým prierezom vodiča je

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \, . \tag{14.4}$$

Skúmajme teraz ustálený elektrický prúd podľa predstáv Newtonovej mechaniky. Vyjadrime si vzťah medzi elektrickým prúdom vo vodiči (prúdovou hustotou) a intenzitou vonkajšieho elektrického poľa. Uvažujme nasledujúci pohyb medzi zrážkami:

- tesne po zrážke má elektrón nulovú rýchlosť $v_1 = 0 \; m/s$,
- tesne pred zrážkou má maximálnu rýchlosť $v_2 = a\,\tau$, kde τ je priemerná doba medzi zrážkami.

Zrýchlenie elektrónu si môžeme vyjadiť z II. Newtonovho pohybového zákona a pomocou elektrickej sily (12.5) takto

$$F = m\,a = e\,E \quad \Rightarrow \quad a = \frac{e\,E}{m} \, .$$

Driftová rýchlosť pohybu elektrónov predstavuje vlastne priemernú rýchlosť medzi dvoma zrážkami, čo sa dá vyjadriť ako

$$v_d = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{a\,\tau}{2} = \frac{e\,E\,\tau}{2\,m} \, . \tag{14.5}$$

Dosadením driftovej rýchlosti do vzťahu pre elektrický prúd vo vodiči (14.2) a využitím vzťahu (14.3) dostaneme pre prúdovú hustotu vyjadrenie

$$J = \frac{n\,e^2\,\tau}{2\,m}\,E \, . \tag{14.6}$$

Tento vzťah sa zjednoduší po zavedení novej konštanty

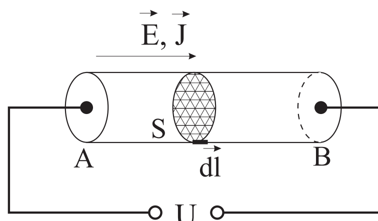
$$\sigma = \frac{n\,e^2\,\tau}{2\,m}\,, \tag{14.7}$$

ktorá sa volá **elektrická vodivosť**. Elektrická vodivosť je konštanta charakteristická pre každý vodič a jej jednotka je $(\Omega^{-1}.m^{-1})$. Podľa jej hodnoty rozdeľujeme prostredie na vodiče, ktoré dobre vedú elektrický prúd a nevodiče, dielektriká, ktoré zle vedú elektrický prúd.

Vektrový zápis vzťahu (14.6) má tvar

$$\vec{J} = \sigma\,\vec{E} \tag{14.8}$$

a volá sa **Ohmov zákon v diferenciálnom tvare.** Tento zákon platí všeobecne pre všetky vodiče, kvapaliny i plyny, pokiaľ intenzita elektrického poľa nepresiahne určitú hodnotu v danom prostredí.



Obrázok 14.2: Rezistor pripojený k zdroju napätia.

14.2 Ohmov zákon

Ako bolo povedané v predošlom odseku, prítomnosť elektrického poľa spôsobuje usmernený pohyb elektrónov vo vodiči, čo môžeme merať ako elektrický prúd I. Z kapitoly Elektrické pole vo vákuu vieme tiež, že intenzita elektrického poľa úzko súvisí s napätím prostredníctvom vzťahu (12.19). Keďže napätie a elektrický prúd dokážeme merať, odvoďme si vzťah medzi týmito dvoma veličinami. Majme homogénny vodič dĺžky $l = |AB|$ (obr. 14.2), pričom pre zmenu napätia (rozdiel potenciálov) na elemente jeho dĺžky dl platí: $\mathrm{d}\varphi = -\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Integráciou cez celú dĺžku vodiča a využitím vzťahu: $\vec{E} = \vec{J}/\sigma$ (14.8) za predpokladu, že vektor prúdovej hustoty je rovnobežný s vodičom, a teda aj s elementom dĺžky $(\vec{J}\parallel d\vec{l})$, dostaneme nasledujúce vyjadrenie

$$\int_A^B \mathrm{d}\varphi = -\int_A^B \frac{J}{\sigma}\,\mathrm{d}l\,.$$

V prípade, že vodičom tečie konštantný prúd I, môžeme použit vzťah $J = I/S$ a spolu s integráciou pravej strany získame vzťah pre napätie

$$U = \varphi_A - \varphi_B = I \int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{\sigma\, S} ,$$

kde integrál

$$R = \int_A^B \frac{dl}{\sigma\, S} , \tag{14.9}$$

sa nazýva **odpor (rezistancia)** vodiča. Jednotkou elektrického odporu je $1\, Ohm$ (Ω). Pre odpor homogénnych vodičov danej dĺžky l a konštantného prierezu S platí

$$R = \frac{l}{\sigma\, S} = \frac{\varrho\, l}{S}, \tag{14.10}$$

kde $\varrho = 1/\sigma$ ($\Omega.m$)je **merný odpor (merná rezistancia, rezistivita)** materiálu vodiča. Je to veličina, ktorá charakterizuje schopnosť vodiča viesť elektrický prúd. Merný odpor závisí od teploty. Teda aj elektrický odpor vo všeobecnosti závisí od teploty, materiálu, rozmerov a tvaru vodiča ako aj ďalších parametrov.

Využitím vyjadrenia pre odpor vodiča (14.9) dostaneme vzťah

$$U = R\, I , \tag{14.11}$$

čo je **Ohmov zákon** alebo tiež **Ohmov zákon v integrálnom tvare**. Tento zákon experimentálne objavil v roku 1826 nemecký fyzik G. S. Ohm[2], podľa ktorého je zákon aj pomenovaný.

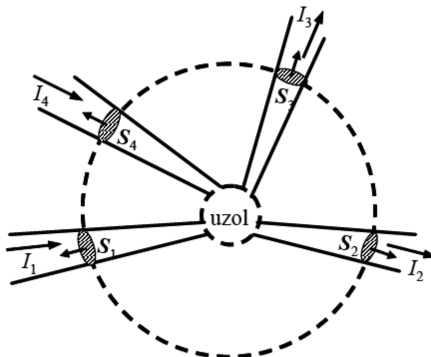
14.3 Kirchhoffove zákony

Jedným zo zákonov charakterizujúcich vlastnosti elektrického náboja je zákon zachovania elektrického náboja. Uvažujme priestor alebo spojenie viacerých vodičov, ktoré obklopíme uzavretou plochou S (obr. 14.3). Pokiaľ sa v danom priestore nachádzajú rovnaké elektrické náboje s celkovým nábojom Q (objemovou hustotou ϱ), tak bez prítomnosti vonkajšej sily sa budú tieto náboje od seba vzďalovať vďaka odpudivej sile. Pre celkový prúd, ktorý vyteká z objemu V_S ohraničeného plochou S podľa vzťahov (14.1), (14.4) bude platiť

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} . \tag{14.12}$$

[2] GEORG SIMON OHM (1789 – 1854) bol nemecký fyzik, preslávil sa objavom závislosti prúdu od napätia. Ohm skúmal tak isto fyzikálnu podstatu sluchu.

Znamienko mínus sme dostali preto, lebo integrujeme cez objem, z ktorého prúd vyteká.



Obrázok 14.3: Spojenie viacerých vodičov obkolesených uzavretou plochou.

Pre stacionárny stav ($\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$) platí, že celkový prúd vytekajúci z objemu V_S je nulový. Toto je prípad už spomenutého spojenia viacerých vodičov (obr. 14.3), kde náboj alebo prúd jednými vodičmi vtečie a druhými vytečie. Na základe obrázku 14.3 a vzťahu (14.12) vyjadríme tok náboja cez uzavretú plochu S ako súčet integrálov cez jednotlivé prierezy vodičov takto

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \int_{S_n} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \ .$$

Prúdovú hustotu $\vec{J}$ tu chápeme ako funkciu priestorových súradníc. Nenulová je len vo vodičoch, lebo mimo nich je prúdová hustota nulová. Jednotlivé integrály v predošlom vzťahu sú prúdy vo vodičoch, a teda konkrétne podľa obrázku 14.3, keď $\mathrm{d}\vec{S}$ je orientovaný na vonkajšiu stranu, platí

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 \ ,$$

pričom znamienka plus alebo mínus pri jednotlivých prúdoch udávajú, či daný prúd do uzla vstupuje, resp. vystupuje. Všeobecne možno predošlý vzťah zovšeobecniť na

$$\sum_{i=1}^{n} I_j = 0 \ , \qquad (14.13)$$

čo je **I. Kirchhoffov[3] zákon: Pri ustálenom prúdení sa algebrický súčet všetkých prúdov, ktoré vstupujú do uzla a vystupujú z uzla, rovná nule.**

[3]GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824 – 1887) - bol nemecký fyzik. Pracoval v oblasti

Ohmov zákon (14.11) vyjadruje vzťah medzi napätím, prúdom a rezistanciou vodiča, resp. úsekom vodiča v nerozvetvenom obvode. Vzťah medzi prúdmi, rezistanciami a elektromotorickými napätiami v ľubovoľnom uzavretom obvode vyjadruje **II. Kirchhoffov zákon: Algebrický súčet elektromotorických napätí zdrojov v ľubovoľnom uzavretom obvode sa rovná algebrickému súčtu napäťových úbytkov na jednotlivých vetvách.**

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} R_j \, I_j \; . \tag{14.14}$$

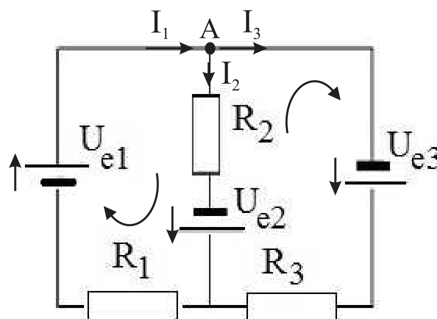
Pomocou I. a II. Kirchhoffovho zákona môžeme riešiť jednoduché a zložité elektrické obvody. Najprv si však objasnime niekoľko základných pojmov. **Uzol:** miesto, v ktorom sa stretávajú aspoň tri vodiče (prúd sa rozdeľuje do jednotlivých vetví) (obr. 14.4 bod A), **vetva:** časť obvodu medzi dvoma uzlami, sériová kombinácia vodičov a zdrojov elektromotorického napätia na danom úseku, **jednoduchý uzavretý elektrický obvod:** je to uzavretá slučka vybraná z rozvetvenej siete a od jednoduchých elektrických obvodov sa líši tým, že v jej rôznych vetvách môžu byť rôzne elektrické prúdy a **sieť:** je sústava jednoduchých elektrických obvodov. Teda pod "riešením" rozumieme výpočet elektrických prúdov vo všetkých vetvách danej siete. Postup pri analýze elektrickej siete je nasledujúci:

1. V každej vetve ľubovoľne zvolíme smer prúdu.
2. Pre každý zdroj elektromotorického napätia naznačíme smer prúdu v zdroji, od záporného ku kladnému pólu zdroja.
3. Ak má sieť m uzlov, napíšeme rovnice podľa I. Kirchhoffovho zákona pre m-*1* uzlov.
4. Označíme si jednotlivé jednoduché uzavreté elektrické obvody tak, aby obvod obsahoval aspoň jednu vetvu, ktorá sa v predchádzajúcich obvodoch nenachádza.
5. V každom vybranom obvode zvolíme smer sčitovania napätí a napíšeme rovnicu podľa II. Kirchhoffovho zákona tak, že elektromotorické napätie

mechaniky, spektrálnej analýzy a elektrotechniky. V roku 1847 vyjadril v matematickej forme poučky o rozdelení elektrického prúdu vo viacvetvových elektrických obvodoch prostredníctvom prvých dvoch tzv. Kirchhoffovych zákonov, ktoré sú základnými vzťahmi, pomocou ktorých sa riešia elektrické obvody.

má kladné znamienko, ak vyvoláva prúd v smere sčitovania a záporné ak je opačne zapojené. Úbytky napätia na jednotlivých rezistanciach sú kladné, ak smer prúdu je zhodný so smerom sčitovania a záporné v opačnom prípade.

6. Takto získame n rovníc s n neznámymi prúdmi.



Obrázok 14.4: Elektrický obvod.

Riešenie jednoduchých obovodov

Pri riešení obvodu zobrazenom na obrázku 14.4 si teda najprv zvolíme smer prúdov. Potom zrátame počet uzlov, v našom prípade 2, teda napíšeme len jednu rovnicu podľa I. Kirchhoffovho zákona pre bod A. Ďalej si označíme smery postupu a smery elektromotorických napätí a zostavíme dve rovnice podľa (14.14), keďže máme dva elektrické obvody (obr. 14.4). Výsledné rovnice majú takýto tvar:

$$
\begin{aligned}
-I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \, , \\
R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U_{e1} + U_{e2} \, , \\
-R_2 I_2 + R_3 I_3 &= -U_{e2} + U_{e3} \, .
\end{aligned}
$$

V prípade, že dostaneme pre prúdy záporné hodnoty, jeho smer je len opačný ako sme predpokladali, no na správnosť riešenia to nemá vplyv.

14.4 Spájanie elektrických odporov

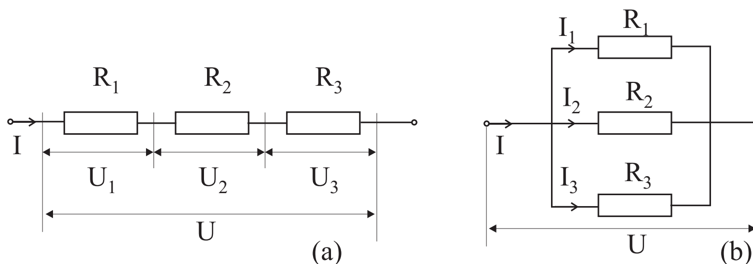
Rezistory môžu byť zapojené v mnohých kombináciách, pričom výslednú hodnotu odporu možno vypočítať postupne - pomocou rozdelenia zapojenia rezistorov na sériové a paralelné. Pri sériovom zapojení (za sebou) (obr. 14.5(a)) je prúd prechádzajúci jednotlivými rezistormi rovnaký a súčet napätí na jednotlivých rezistoroch je rovný napätiu na celej sústave rezistorov. Túto skutočnosť môžeme zapísať nasledujúcim spôsobom

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \sum_{i=1}^{3} U_i$$

$$U = R_1 I + R_2 I + R_3 I = I \sum_{i=1}^{3} R_i = I\,R\,.$$

Pri vyjadrení bol využitý fakt, že elektrický prúd prechádzajúci cez každý rezistor je rovnaký. Pre výslednú hodnotu odporu pri sériovom zapojení rezistorov platí teda všeobecný vzťah

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i\,. \tag{14.15}$$



Obrázok 14.5: Sériové a paralelné zapojenie rezistorov.

Pri paralelnom zapojení (vedľa seba) (obr. 14.5(b)) sú zase napätia na všetkých rezistoroch rovnaké a pre súčet jednotlivých prúdov (I. Kirchhoffov zákon) platí

$$I = I_1 + I_2 + I_3\,.$$

Pre každý z rezistorov na základe Ohmovho zákona ($U = R\,I$) sa dá písať: $U = R_1\,I_1$, $U = R_2\,I_2$ a $U = R_3\,I_3$. Po aplikovaní na predošlú rovnicu a jednoduchej úprave dostaneme vzťah pre výsledný odpor paralelne zapo-

jených resistorov

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \ . \tag{14.16}$$

14.5 Teplotná závislosť elektrického odporu

Ako už bolo spomenuté, elektrický odpor kovového vodiča nezávisí len od typu materiálu, rozmerov a tvaru, ale tiež od teploty. Pri ohrievaní vodiča dochádza k nárastu rýchlosti vodivostných elektrónov, čím sa skracuje doba medzi dvoma zrážkami elektrónov. V dôsledku toho rastie vodivosť materiálu, čo sa prejaví ako pokles odporu vodiča (14.10). Pre čisté kovy je možno závislosť na teplote vyjadriť polynómom:

$$R(T) = R_0(1 + \alpha\Delta T + \beta(\Delta T)^2 + \gamma(\Delta T)^3 + \cdots) \ ,$$

kde $R_0 = R(T_0)$ je odpor vodiča pri referenčnej teplote, $\Delta T = T - T_0$ a α, β, γ sú koeficienty závislé od teploty a určia sa meraním elektrického odporu pri rôznych teplotách. Pre malé zmeny teploty v okolí izbovej teploty je závislosť elektrického odporu väčšiny kovov od teploty lineárna. Stačí uvažovať len prvý člen radu a platí

$$R(T) = R_0(1 + \alpha\Delta T) \ , \tag{14.17}$$

kde $\alpha\,(K^{-1})$ je **teplotný súčiniteľ odporu**. Nielen hodnoty rezistivít ale aj teplotných koeficientov elektrického odporu veľmi silne závisia od čistoty materiálu a od spôsobu spracovania. Väčšina čistých kovov má teplotný koeficient α rádu $10^{-6}\,K$ v rozsahu teplôt od $-20\,°C$ po $100\,°C$

14.6 Zdroje elektromotorického napätia

Ak elektrickým vodičom prepojíme dva body s rôznym potenciálom, vznikne v ňom elektrické pole. Toto elektrické pole spôsobí usporiadaný pohyb náboja (elektrický prúd) vo vodiči. Rôzny potenciál je napríklad medzi nabitými doskami kondenzátora, pričom v dôsledku elektrického prúdu bude kladný elektrický náboj prechádzať z jednej dosky (elektródy) s kladným elektrickým potenciálom do miesta so záporným elektrickým potenciálom. Po určitej dobe dôjde k vyrovnaniu elektrických nábojov na doskách a elektrický prúd zanikne. Aby bolo možné elektrický prúd vo vodiči udržať, je potrebné, aby na koncoch vodiča bol neustály rozdielny potenciál - musíme stále dodávať elektrický

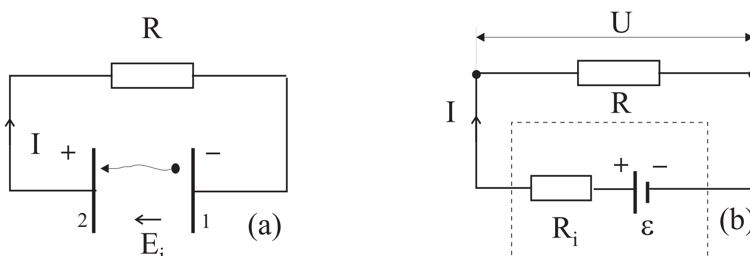
náboj. Zariadenie, ktoré má konštantný rozdiel potenciálov, teda dopĺňa elektrické náboje na elektródy, sa nazýva **zdroj elektromotorického napätia** (EMN zdroj). Elektróda s kladným elektrickým potenciálom je kladný pól zdroja (+ svorka), druhá elektróda sa nazýva záporný pól zdroja (- svorka). Vnútri takéhoto zdroja sa kladné elektrické náboje pohybujú opačným smerom než by sa pohybovali za účinku elektrického poľa medzi týmito elektródami. V EMN zdroji preto existujú sily, ktoré konajú prácu proti silám elektrického poľa.

Elektromotorické napätie zdroja sa rovná práci, ktorú vykoná cudzia sila pri prenesení jednotkového kladného elektrického náboja z miesta nižšieho elektrického potenciálu (zo zápornej svorky zdroja) do miesta s vyšším potenciálom (kladná svorka) proti silám existujúceho elektrického poľa.

Ak si označíme elektrické pole vnútri EMN zdroja ako $\vec{E_i}$ (obr. 14.6(a)), potom pre veľkosť elektromotorického napätia platí

$$\varepsilon = \int_1^2 \vec{E_i} \cdot d\vec{r} \, . \tag{14.18}$$

Jednotkou elektromotorického napätia je *Volt.*



Obrázok 14.6: Elektromotorické napätie a vnútorný odpor zdroja.

Ideálny EMN zdroj nekladie žiadny odpor pohybu nábojov vnútri zdroja od pólu k pólu, čiže nemá žiadny vnútorný odpor. Napätie medzi svorkami zdroja je teda rovné presne ε. V reálnom zdroji však treba brať do úvahy sily pôsobiace proti pohybu nábojov, čo sa dá komplexne charakterizovať **vnútorným odporom R_i zdroja**. Pokiaľ reálny zdroj nie je zapojený do obvodu, nepreteká ním žiadny prúd a jeho vnútorný odpor sa neprejaví. Napätie medzi svorkami zdroja, **svorkové napätie** je rovné ε. V prípade, že takýto zdroj je zapojený do obvodu s odporom R (obr. 14.6(b)), bude obvodom pretekať elektrický prúd I a svorkové napätie U je menšie od ε o pokles napätia $U_i = R_i\, I$

na vnútormom odpore zdroja. Teda platí

$$\varepsilon = U + U_i = R\,I + R_i\,I = (R + R_i)\,I\;. \tag{14.19}$$

Tento vzťah voláme aj **Ohmov zákon pre uzavretý obvod**. Na základe odvodeného vzťahu si môžeme predstaviť náhradnú schému zdroja EMN tak, že reálny zdroj EMN nahradíme sériovým zapojením ideálneho (bezodporového) zdroja EMN a jeho vnútorného elektrického odporu R_i (obr. 14.6(b)).

Zdrojmi elektromotorického napätia sú napr. galvanické články, akumulátory, dynamá, termočlánky a pod. Podľa veľkosti vnútorného elektrického odporu delíme zdroje na **tvrdé** a **mäkké**. Ak má zdroj malý vnútorný odpor, hovoríme o tvrdých zdrojoch EMN. Na takomto zdroji je napäťový spád malý v porovnaní s elektromotorickým napätím. Ide napr. o akumulátor používaný v autách, ktorého vnútorný elektrický odpor je $m\Omega$, a preto aj keď štartovací prúd presahuje stovky ampérov, predstavuje úbytok napätia na vnútornom elektrickom odpore len $0,2\,V$. Mäkké napäťové zdroje sú zdroje s veľkým vnútorným elektrickým odporom – sú to napr. elektrostatické generátory napätia.

14.7 Práca a výkon prúdu

Pri premiestňovaní náboja Q z jedného miesta s daným potenciálom na druhé s iným potenciálom vykonajú sily poľa prácu $W = Q\,U$ (12.19), kde U zodpovedá rozdielu potenciálov v daných miestach. Pri tečení elektrického prúdu tiež ide o presun častíc s nábojom, pričom teraz zodpovedajúcu prácu vykonáva zdroj napätia. Ak veľkosť náboja Q, ktorý prejde pri konštantnom elektrickom prúde I za čas t je $Q = I\,t$, potom vykonaná práca sa dá písať v tvare

$$W = U\,I\,t = R\,I^2\,t\;. \tag{14.20}$$

Odtiaľ pre výkon elektrického prúdu vychádza

$$P = \frac{W}{t} = R\,I^2\;. \tag{14.21}$$

Jednotka pre výkon je watt (W). Z tohto vzťahu vidíme, že prácu tiež možno vyjadriť ako súčin výkonu a času, a tak získať jej bežne používanú praktickú jednotku kilowatthodina (kWh). Platí: $1\,kW.h = 1000\,W.3600\,s = 3,6\times10^6\,J$.

Zo skúseností je známe, že vodič sa prechodom elektrického prúdu ohrieva. Vznik tohto tepla vo vodiči je spojený s usmerneným pohybom nábojov,

ktoré pri zrážkach odovzdávajú svoju kinetickú energiu kmitajúcim časticiam mriežky, čo spôsobuje nárast vnútornej energie vodiča. Mierou zmeny tejto vnútornej energie je teplo, ktoré je úmerné práci zdroja (14.20) a je dané vzťahom

$$Q = U\,I\,t = R\,I^2\,t\,. \qquad (14.22)$$

Tento vzťah odvodili súčasne anglický fyzik James Prescott Joule a ruský fyzik Friedrich Emil Lenz a preto sa volá **Joule-Lenzov zákon**. Tento jav má v praxi veľký **pozitívny** význam, hlavne v prípade ohrevu v odporových peciach, varných kanviciach, teplovzdušných ventilátoroch, pri sušení a pod. V každodennom živote nám tento jav prináša zdroj svetla v podobe rozžiarených vlákien žiaroviek. Napriek týmto výhodám je treba spomenúť i **negatívne** dôsledky, hlavne značné straty elektrickej energie pri prenose, resp. dôležitosť zabezpečiť odvod tepla pri mnohých elektrických spotrebičoch.

15 Magnetické pole

Magnetické vlastnosti niektorých látok si ľudia všimli už v staroveku, čo vieme z rôznych historických dokumentov a prác. V Číne už pred 3000 rokmi používali orientáciu magnetky na navigáciu. Napriek rôznym pokusom dlho nebola známa žiadna súvislosť medzi elektrickými javmi a prejavmi magnetizmu. Ich vzájomný súvis objavil v roku 1820 dánsky fyzik H. Ch. Orsted[1]. Zistil, že magnetka umiestnená v okolí vodiča sa vychýli zo svojej rovnovážnej polohy, ak vodičom prechádza prúd. Ďalšie silové pôsobenie medzi vodičmi, ktorými preteká elektrický prúd, pozoroval André Márie Ampére. Vznik elektrického poľa vplyvom zmeny magnetického poľa - toku objavil v roku 1831 Michael Faraday (Faradayov objav zákona elektromagnetickej indukcie). J. C. Maxwell[2] svojou teóriou elektromagnetizmu pomocou sústavy rovníc aj teoreticky potvrdil elektrické a magnetické javy. Vždy, ak sa mení pole elektrické, vzniká pole magnetické, ak sa mení pole magnetické, vzniká pole elektrické. V tejto časti sa budeme zaoberať stacionárnym magnetickým poľom, t. j. keď môžeme dané javy popisovať oddelene.

15.1 Magnetické pole

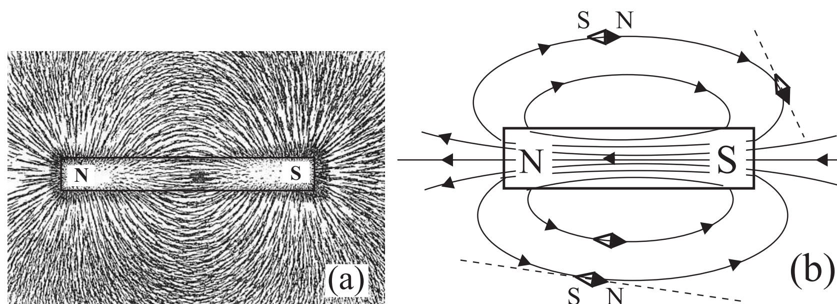
V súčasnosti sa každý z nás už stretol s magnetickým poľom. Magnetické pole si bežne spájame s magnetom. Magnety prejavujú svoj silový účinok hlavne na koncoch (póloch). Každý magnet má dva póly: severný S a južný pól J. Rovnaké póly sa odpudzujú (S a S, J a J) a opačné póly sa priťahujú

[1]HANS CHRISTIAN ORSTED (1777 – 1851) bol dánsky fyzik a chemik. Na počesť jeho výskumu v oblasti elektromagnetizmu je po ňom pomenovaná staršia jednotka magnetickej indukcie (Orsted)

[2]JAMES CLERK MAXWELL (1831–1879) bol škótsky fyzik. Jeho najväčším objavom je všeobecný matematický opis zákonov elektriny a magnetizmu, dnes známy ako Maxwellove rovnice. Známe je aj jeho Maxwell-Boltzmannovo rozdelenie rýchlostí v kinetickej teórii plynov.

(J a S).

Magnetické pole vytvárané magnetom si dokážeme znázorniť pomocou železných pilín. Pôsobením magnetických síl sa piliny natáčajú, čím vytvárajú istú sústavu čiar, ktoré voláme magnetické siločiary (indukčné čiary) (obr. 15.1(a)). V miestach, kde sú silové účinky magnetického poľa najväčšie, je najväčšia aj hustota čiar. Namiesto pilín možno použiť malé kompasy (obr. 15.1(b)). Keď malú magnetku budeme postupne umiesťovať na rozličných miestach pilinového obrazca, ustáli sa vždy tak, že jej os má smer dotyčnice k predpokladanej čiare prechádzajúcej týmto miestom. Svojimi severnými pólmi magnetky ukazujú k južnému pólu magnetu. Teda vytvorenie pilinového obrazca možno vysvetliť tak, že každá pilinová častica sa správa ako miniatúrna magnetka. Každé magnetické pole má svoju silu, intenzitu, tvar a smer. Na určenie veľkosti magnetického poľa sa používa **magnetická indukcia**.



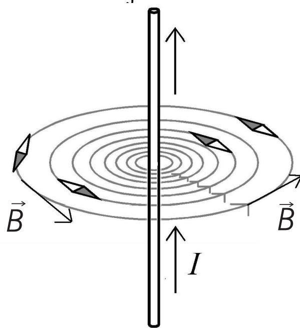
Obrázok 15.1: Magnetické pole tyčového magnetu znázornené železnými pilinami a magnetickými siločiarami s magnetkami.

Na opis priestorového rozloženia magnetického poľa zavádzame sústavu priestorovo orientovaných kriviek, ktoré sa nazývajú magnetické indukčné čiary. **Magnetická indukčná čiara je priestorovo orientovaná krivka, ktorej dotyčnica v danom bode má smer osi veľmi malej magnetky umiestnenej v tomto bode. Mimo magnetu má smer indukčnej čiary od severného k južnému pólu magnetu.** Magnetické indukčné čiary sú vždy uzavreté krivky, ktoré sa nikde nepretínajú (obr. 15.1(b)). Preto sa magnetické indukčné čiary permanentného magnetu nenachádzajú len zvonka, ale aj vo vnútri magnetu (od južného k severnému pólu) (obr. 15.1(b)).

Rovnako v magnetickom poli vodiča s prúdom môžeme utvoriť pilinový obrazec. Majme tvrdý kartónový papier, ktorého stredom v kolmom smere na papier prechádza priamy vodič s prúdom rádovo 100 A. Ak na tento pa-

pier nasypeme železné piliny, tak piliny utvoria obrazec pripomínajúci rovinnú sústavu sústredných kružníc so stredmi v mieste prechodu vodiča papierom. Orientáciu magnetických indukčných čiar v okolí vodiča s prúdom môžeme určiť aj pomocou **Ampérovho pravidla pravej ruky: Naznačíme uchopenie vodiča do pravej ruky tak, aby palec ukazoval smer prúdu vo vodiči; potom prsty ukazujú orientáciu magnetických indukčných čiar (obr. 15.2).**

Magnetické pole, ktorého indukčné čiary sú rovnobežné priamky, nazývame homogénne magnetické pole. Každé reálne magnetické pole je nehomogénne. Napríklad nehomogénne je magnetické pole tyčového magnetu (obr. 15.1(b)) alebo solenoindu (obr. 15.7). No v konečnej oblasti priestoru možno však vytvoriť magnetické pole, ktoré sa od homogénneho odlišuje iba nepatrne. Za takmer homogénne možno pokladať magnetické pole zeme na povrchu ako aj napríklad magnetické pole v strednej časti valcovej cievky (obr. 15.7(b)).



Obrázok 15.2: Magnetické pole v okolí priameho vodiča.

15.2 Magnetická indukcia

Magnetické pole, podobne ako gravitačné a elektrické, je vektorové pole. Na kvantitatívny opis magnetického poľa v každom jeho bode zavádzame fyzikálnu veličinu nazývanú **magnetická indukcia** a označujeme ju $\vec{B}$. V každom bode magnetického poľa má vektor $\vec{B}$ smer dotyčnice k indukčnej čiare (obr. 15.1(b), 15.2).

15.2.1 Lorentzova sila

Na pohybujúci sa elektrický náboj v elektromagnetickom poli pôsobia dve sily. Jedna je daná veľkosťou elektrického poľa a druhá zasa smerom po-

hybu náboja na smer magnetického poľa. Veľkosť elektrickej sily sa dá vyjadriť pomocou vzťahu (12.5): $\vec{F}_e = Q\,\vec{E}$. Z pozorovaní vyplýva, že veľkosť **magnetickej sily** $\vec{F}_M$ na pohybujúci sa elektrický náboj závisí od rýchlosti a veľkosti daného náboja, veľkosti a smeru magnetického poľa podľa nasledujúceho vzťahu:

$$\vec{F}_M = Q\,(\vec{v} \times \vec{B})\ . \tag{15.1}$$

Ako vyplýva z definície vektorového súčinu, magnetická sila je vždy kolmá na vektor rýchlosti $\vec{v}$ a vektor magnetickej indukcie $\vec{B}$. Pri určovaní smeru sily nesmieme zabudnúť na polaritu náboja! Magnetická sila nemení veľkosť rýchlosti častice, ale iba jej smer. Jednotka magnetickej indukcie sa volá **tesla**[3] ($T = N/(C.m.s)^{-1} = N.A^{-1}.s^{-1}$). Staršou jednotkou nepatriacou do sústavy SI je 1 Gauss $= 10^{-4}\,T$.

Ak sa elektrický náboj pohybuje v elektrickom aj magnetickom poli súčasne, potom celková sila pôsobiaca na elektrický náboj je

$$\vec{F} = Q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\ . \tag{15.2}$$

Výsledná sila pôsobiaca na elektrický náboj pohybujúci sa v elektrickom a magnetickom poli má názov **Lorentzova**[4] sila.

15.2.2 Pohyb náboja v magnetickom poli

Preberme si teraz tri možné prípady pôsobenia magnetickej sily na pohyb elektrónu v magnetickom poli. Najprv si vyberieme možnosť, keď elektrón vletí do homogénneho magnetického poľa rovnobežne s indukčnými čiarami ($\alpha \| \vec{B}$, obr. 15.3(a)). V tomto prípade bude magnetická sila nulová ($\vec{v} \times \vec{B} = v\,B \sin 0° = 0$) a elektrón sa pohybuje ďalej vo svojom smere, ako keby magnetické pole neexistovalo.

V druhom prípade elektrón vletí do homogénneho magnetického poľa kolmo na indukčné čiary ($\alpha \perp \vec{B}$, obr. 15.3(b)). Magnetická sila má svoju maximálnu hodnotu $F_M = e\,v\,B$ a elektrón sa začne pohybovať po kružnici. Pri pohybe po kružnici pôsobí na elektrón aj odstredivá sila, ktorá má veľkosť magnetickej

[3]Jednotka magnetickej indukcie bola nazvaná na počesť NIKOLA TESLU (1856 – 1943), juhoslovanského elektrotechnika, ktorý žil v Amerike.

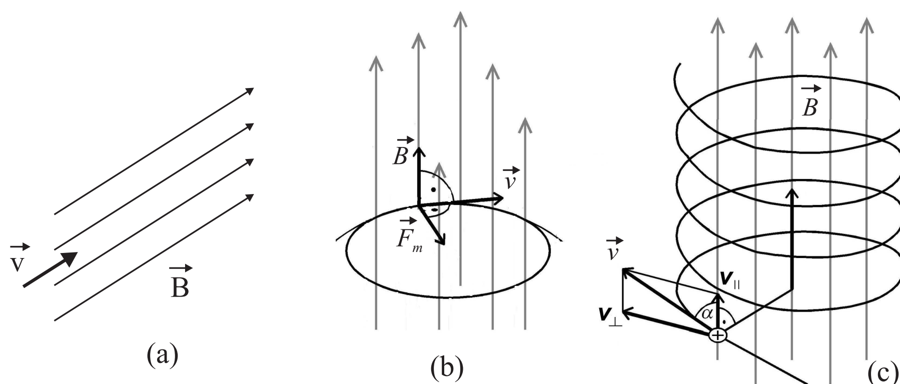
[4]HENDRIK ANTON LORENTZ (1853 – 1928) bol holandský fyzik a nostieľ Nobelovej ceny za fyziku z roku 1902. Nobelovu cenu získal spolu s Pieterom Zeemanom za výskum vplyvu magnetizmu na žiarenie, najmä Zeemanov jav.

sily. Z rovností týchto síl dostaneme polomer kružnice:

$$F_O = F_M \quad \Rightarrow \quad m_e \frac{v^2}{R} = e\, v\, B \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m_e\, v}{e\, B}\,. \tag{15.3}$$

Pri tomto pohybe sa veľkosť rýchlosti častice tiež nemení. Zo známeho polomeru kružnice pre periódu obehu elektrónu platí: $T = 2\,\pi\, m/(e\, B)$. Všimnite si, že doba obehu častice nezávisí od rýchlosti, ktorou častica vletela do magnetického poľa.

Ak častica nevletí do magnetického poľa kolmo na smer indukčných čiar, ale vektor rýchlosti bude zvierať s vektorom magnetickej indukcie uhol α (obr. 15.3(c)), potom vektor rýchlosti môžeme rozložiť na zložku kolmú na magnetické pole $v_\perp = v$ sin α a zložku rovnobežnú so smerom vektora magnetickej indukcie $v_\parallel = v$ cos α. Pohyb častice bude zložitejší a bude sa skladať z dvoch pohybov. Bude to pohyb po kružnici spôsobený zložkou $v_\perp$ a priamočiary pohyb rýchlosťou $v_\parallel$ v smere vektora $\vec{B}$. Výsledkom bude pohyb po špirále.



Obrázok 15.3: Pohyb elektrónu po vstupe (a) rovnobežne, (b) kolmo na magnetické pole a (c) šikmo na magnetické pole.

15.2.3 Ampérova sila

Elektrický prúd vo vodiči predstavuje usmernený pohyb elektrických nábojov. Ak máme vodič, ktorým preteká elektrický prúd a nachádza v magnetickom poli, potom podľa vzťahu (15.1) na každý náboj, elektrón, pôsobí magnetická sila. Celková výslednica tejto sily na všetky náboje vo vodiči sa nazýva Ampérova sila. Majme dĺžkový element d$\vec{l}$ vodiča orientovaný v smere elektrického prúdu I (vektora prúdovej hustoty $\vec{J}$, kap. 14.1, (14.3)). Náboj, ktorý

prejde prierezom vodiča S za čas dt, je d$Q = I\,\mathrm{d}t$. Na tento náboj pohybujúci sa rýchlosťou $v = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$ v magnetickom poli indukcie B pôsobí elementárna magnetická sila (15.1):

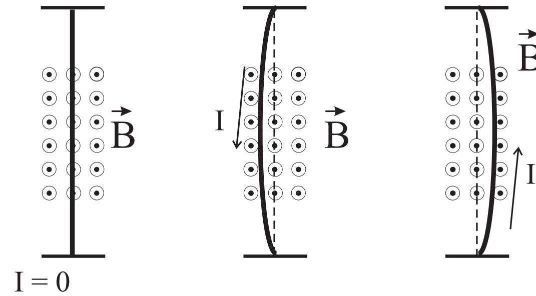
$$\mathrm{d}\vec{F}_M = \mathrm{d}Q\,(\vec{v}\times\vec{B}) = I\,\mathrm{d}t(\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}) = I\,(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B})\ . \qquad (15.4)$$

Výslednú **Ampérovu silu,** pôsobiacu na vodič s elektrickým prúdom I v magnetickom poli s magnetickou indukciou $\vec{B}$, dostaneme integráciou elementárnych síl $d\vec{F}$ po celej dĺžke vodiča L:

$$\vec{F} = \int_L I\,(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B})\ . \qquad (15.5)$$

Výpočet Ampérovej sily je podstatný pri vyhodnocovaní silových účinkov prúdu v magnetickom poli. Majme priamy vodič dĺžky L v homogénnom magnetickom poli s indukciou $\vec{B}$, ktorým preteká elektrický prúd I. V tomto prípade sa vektorový súčin dá zapísať ako $(d\vec{l}\times\vec{B}) = dl\,B\,\sin\,\alpha$, kde α je uhol, ktorý zviera vodič s vektorom magnetickej indukcie. Po ďalšom integrovaní rovnice (15.5) pozdĺž celého vodiča dĺžky L dostaneme výslednú silu pôsobiacu na daný vodič

$$F = I\,L\,B\,\sin\,\alpha\ . \qquad (15.6)$$



Obrázok 15.4: Vplyv magnetického poľa na priamy vodič s elektrickým prúdom.

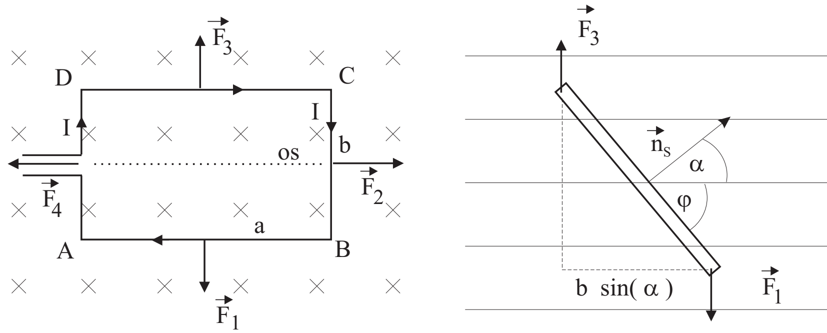
Majme magnetické pole, ktoré vystupuje kolmo z roviny zobrazenej základne (obr. 15.4), čo je reprezentované označením ⊙. Ak vodičom tečie elektrický prúd smerom nadol, vodič sa bude ohýbať doľava. Pokiaľ prúd tečie opačným smerom, vodič sa bude ohýbať na opačnú stranu - smerom doprava, ako je znázornené na obrázku 15.4.

15.2.4 Magnetický moment prúdového závitu

Nakoniec si ešte preberieme vplyv silového pôsobenia magnetického poľa na prúdový závit. Majme pravouhlý obdĺžnikový prúdový závit $ABCD$ s rozmermi a, b, ktorým preteká jednosmerný elektrický prúd I (obr. 15.5). Tento závit nech je umiestnený do homogénneho magnetického poľa s magnetickou indukciou $\vec{B}$, pričom sa môže voľne otáčať okolo osi o. Ak zabezpečíme, že os otáčania je kolmá na vektor $\vec{B}$, potom časti závitu AB, CD budú stále kolmé na smer magnetickej indukcie. Druhé časti závitu AD, BC zvierajú vo všeobecnosti s vektorom magnetickej indukcie $\vec{B}$ uhol φ. Keďže nimi preteká prúdu I v opačnom smere, pôsobí teda na ne magnetické pole silami rovnakej veľkosti

$$F_b = F_2 = F_4 = B\,I\,b\,\sin\varphi\ ,$$

ktoré majú opačný smer pôsobenia a navzájom sa rušia. Analogicky na strany



Obrázok 15.5: Prúdová slučka v magnetickom poli.

AB, CD kolmé k vektoru $\vec{B}$ pôsobia sily rovnakej veľkosti

$$F_a = F_1 = F_3 = B\,I\,a\ ,$$

no sú opačne orientované. Tieto sily teda tvoria dvojicu síl, ktorých moment sily M má veľkosť

$$M = F_a\,b\,\sin\alpha = B\,I\,a\,b\,\sin\alpha = B\,I\,S\,\sin\alpha\ , \qquad (15.7)$$

kde $S = a\,b$ je plocha závitu. Vo vektorovom vyjadrení sa dá otáčavý moment magnetického poľa na prúdový závit zapísať v tvare

$$\vec{M} = I\,(\vec{S}\times\vec{B})\ . \qquad (15.8)$$

Pôsobením tohoto otáčavého momentu sa závit s prúdom v danom magnetickom poli snaží natočiť do smeru kde rovina slučky bude kolmá k magnetickým indukčným čiaram (vektor normály plochy je rovnobežný s vektorom magnetickej indukcie, obr. 15.5(b)). V tomto stave je aj magnetická energia závitu minimálna.

Prúdový závit sa v magnetickom poli chová podobne ako dipól v elektrostatickom poli (pozri 12.8 Elektrický dipól), teda mu hovoríme **magnetický dipól**. Analogicky ako elektrický dipól $\vec{p} = Q\,\vec{d}$ v elektrostatickom poli zavádzame v magnetickom poli veličinu

$$\vec{m} = I\,\vec{S} \tag{15.9}$$

pomenovanú **magnetický moment prúdovej slučky** $(A.m^2)$. Otáčavý moment sily (15.8) sa dá potom vyjadriť vzťahom

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \,. \tag{15.10}$$

Pôsobenie magnetického poľa na prúdový závit má široké využitie ako v technickej praxi, tak aj pri vysvetľovaní magnetických vlastností určitých materiálov. Na jeho princípe pracujú napr. meracie prístroje s otočnou cievkou (magnetoelektrické alebo deprézske) a ďalšie elektrotechnické zariadenia (elektromotor, dynamo).

15.3 Biotov-Savartov-Laplaceov zákon

V úvode bolo spomenuté, že jedným z prvých pokusov magnetizmu bolo pozorovanie magnetického poľa v okolí vodiča s prúdom. Výpočet tohoto magnetického poľa umožňuje zákon, ktorý je zovšeobecnením experimentálnych pozorovaní J. B. Biota[5] a F. Savarta[6]. Element vodiča s dĺžkou $d\vec{l}$, orientovaný v smere prúdu I, budí v mieste P určenom vzhľadom na $d\vec{l}$ polohovým vektrom $\vec{r}$ (obr. 15.6(a)) indukciu magnetického poľa o veľkosti

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \,. \tag{15.11}$$

[5] JEAN-BAPTISTE BIOT (1774 – 1862) bol francúzsky fyzik a astronóm. Skúmal dvojlom a polarizáciu svetla a optickú aktivitu látok (založil sacharometriu), elekromagnetické pole, tepelnú vodivosť a tepelný tok. Formuloval aj teóriu chromatickej polarizácie a vynašiel polarimeter.

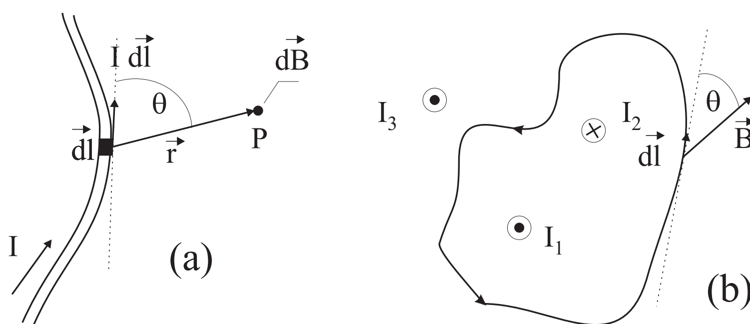
[6] FELIX SAVART (1791 – 1841) pracoval na teórii magnetizmu a elektrického prúdu.

Zo vzťahu je vidieť, že príspevok $d\vec{B}$ od prúdového elementu $I\,d\vec{l}$ je lineárne úmerný prúdu a má smer určený podľa pravidla o vektorovom súčine. V prípade zobrazenom na obrázku 15.6(a), pričom vektory $d\vec{l}$ a $\vec{r}$ ležia v rovine papiera, $d\vec{B}$ smeruje kolmo na papier. Zaviedli sme novú konštantu μ_0, ktorá sa nazýva **permeabilita vákua**. Má presnú hodnotu a veľkosť tejto konštanty v sústave SI súvisí s definíciou ampéra a určitými racionálnymi dôvodmi. Veľkosť permeability vákua je $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, kg.m.s^{-2}.A^{-2}$. S permitivitou vákua a permeabilitou vákua súvisí rýchlosť svetla vo vákuu, a to vzťahom

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}\,. \tag{15.12}$$

Pokiaľ nás zaujíma magnetická indukcia v okolí určitého vodiča, vypočítame ju integráciou vzťahu (15.11) pozdĺž celej prúdočiary

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\,. \tag{15.13}$$



Obrázok 15.6: Určenie magnetického poľa v okolí vodiča a vodičov, ktorými tečie elektrický prúd.

15.4 Ampérov zákon - zákon celkového prúdu

V elektrostatickom poli môžeme pomocou Gaussovej vety (12.8) vypočítať intenzitu elektrického poľa v prípadoch, ktoré sa vyznačujú vhodnou symetriou (kap. 12.4 Aplikácie Gaussovej vety). Gaussova veta má však aj mnohé ďalšie fyzikálne aplikácie pre pochopenie vlastností elektromagnetického poľa. Dôležité postavenie má Ampérov zákon (tiež nazývaný zákon celkového prúdu) v magnetizme. **Ampérov zákon** tvrdí: **Rotácia vektora magnetickej**

indukcie po uzatvorenej dráhe sa rovná celkovému elektrickému prúdu I_{cel} pretekajúcemu plochou, obopnutou integračnou dráhou krát permeabilita vákua

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \, I_{cel} \; . \tag{15.14}$$

Ampérov zákon sa používa na určenie magnetickej indukcie v okolí vodičov, ktorými preteká jednosmerný elektrický prúd. Pri výpočte magnetickej indukcie podobne, ako tomu bolo v elektrostatike, využívame kvôli zjednodušeniu vhodné prvky symetrie.

Najjednoduchšou aplikáciou Ampérovho zákona (15.14) je výpočet magnetického poľa v okolí nekonečného vodiča. Ak priamym vodičom preteká elektrický prúd I v smere znázornenom na obrázku 15.2, tak vo svojom okolí vytvára magnetické pole, ktorého indukčné čiary sú sústredné kružnice so stredom v strede vodiča. Nás zaujíma veľkosť magnetického poľa vo vzdialenosti a od vodiča. Uzavretú dráhu okolo vodiča vyberieme tak, aby sa zhodovala s indukčnou čiarou. Má to dve výhody: a) vektor magnetickej indukcie $\vec{B}$ má smer dotyčnice k indukčnej čiare a namiesto skalárneho súčinu vo vzťahu (15.14) použijeme len súčin veľkostí daných vektorov $B\,dl$ a po b) na indukčnej čiare je veľkosť magnetickej indukcie konštantná, čiže ju potom môžeme vybrať pred integrál. Integrál po uzavretej dráhe, kružnici s polomerom a, je $2\,\pi\,a$. Vybranou uzavretou dráhou sme vybrali len jeden vodič, ktorým pretekal prúd I. Všetko, čo sme si povedali, môžeme zapísať takto

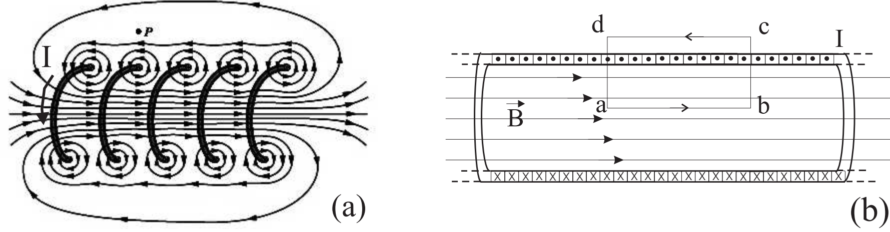
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint B \, \mathrm{d}l = B \oint \mathrm{d}l = B \, 2\,\pi\,a = \mu_0 \, I_{cel} = \mu_0 \, I \; .$$

Z predošlého výpočtu vyplýva, že magnetické pole v okolí nekonečne dlhého priameho vodiča s prúdom I vo vzdialenosti a sa dá určiť podľa vzťahu

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\,\pi\,a} \; . \tag{15.15}$$

Teraz si preštudujeme ďalšiu situáciu, v ktorej zasa možno použiť Ampérov zákon (15.14). Budeme sa zaoberať magnetickým poľom vytvoreným prúdom v dlhej jednovrstvej valcovej cievke s hustým vinutím závitov - solenoide (obr. 15.7). Magnetické pole v okolí každého závitu má podobný priebeh s poľom priameho vodiča (obr. 15.2). Výsledné magnetické pole solenoidu je vytvorené superpozíciou polí vytvorených jednotlivými závitmi solenoidu. V bodoch mimo solenoidu, napr. v bode P na obrázku 15.7(a), je výsledné magnetické pole vytvárané najbližšími časťami závitov solenoidu ($\vec{B}$ mieri

doľava, ako je ukázané v tesnej blízkosti bodu P, prúd tečie smerom k nám - označenie bodkou) a vzdialenejšími časťami závitov ($\vec{B}$ mieri doprava, prúd tečie smerom od nás - označenie krížikom). Oba príspevky sú orientované proti sebe a v prípade ideálneho solenoidu sa vyrušia a magnetické pole mimo solenoidu je potom nulové.



Obrázok 15.7: (a) Indukčné čiary magnetického poľa znázornené v reze pozdĺž osi solenoidu. (b) Magnetické pole vo vnútri solenoidu s uzavretou Ampérovou krivkou.

Jednoducho sa pole analyzuje iba na osi solenoidu, kde je pole homogénne a indukcia má smer pozdĺž osi. Priebeh indukčných čiar je zobrazený v reze solenoidu na obrázku 15.7(b). Nami vybranú integračnú dráhu (obr. 15.7(b), a-b-c-d-a) rozdelíme na integrály po jednotlivých úsekoch krivky. Nech dĺžka úsekov ab a cd je h. Integrál (15.14) po vybranej integračnej krivke sa dá rozpísať takto

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Na integračnej ceste ab má vektor magnetickej indukcie totožný smer s vektorom elementu dĺžky krivky. Keďže magnetické pole vo vnútri selenoidu je konštantné a má hodnotu B, môžeme prvý integrál na danej oblasti vyjadriť ako $B\,h$, kde h je dĺžka integračnej cesty ab. Na integračnej ceste bc a da je magnetické pole vo vnútri solenoidu kolmé na dané integračné krivky, takže skalárny súčin $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ je potom nulový. Nakoniec na integračnej ceste cd je magnetické pole nulové (zanedbateľné oproti poľu vo vnútri solenoidu), takže aj potom je integrál rovný nule. Zvolená krivka pretína N závitov s prúdom I, čiže celkový prúd uzavretý krivkou je $I_{cel} = N\,I$. Spojením predošlých informácií a úprav dostaneme vzťah pre magnetické pole vnútri nekonečne dlhého solenoidu

$$B = \mu_0 \frac{N\,I}{h} = \mu_0\, n\, I\,, \tag{15.16}$$

kde $n = N/h$ je počet závitov na jednotku dĺžky solenoidu. Na okrajoch konečného solenoidu magnetické pole nie je homogénne, zoslabuje sa a indukčné čiary sa rozbiehajú.

15.5 Sila medzi dvomi rovnobežnými vodičmi, definícia ampéra

Majme dva rovnobežné vodiče, ktorými pretekajú elektrické prúdy I_1 a I_2 a kolmá vzdialenosť vodičov nech je d. Budeme predpokladať, že vodiče majú zanedbateľný prierez a sú vo vákuu. Vodiče s prúdom vytvárajú vo svojom okolí magnetické pole, vďaka ktorému pôsobia na seba silou. Z toho, čo sme si dosiaľ uviedli o magnetickom poli, vieme túto silu medzi vodičmi jednoducho vysvetliť - ide o Ampérovu silu (15.6). Na jeden z vodičov sa môžeme pozerať ako na vodič, ktorý vytvára magnetické pole a na druhý ako na vodič, nachádzajúci sa v magnetickom poli. Samozrejme platí to tiež naopak. Sila medzi vodičmi bude príťažlivá alebo odpudivá, a to podľa orientácie elektrických prúdov. **Dva rovnobežné vodiče, ktorými preteká elektrický prúd rovnakým smerom sa priťahujú, zatiaľ čo vodiče s prúdmi v opačnom smere sa odpuzujú.**

Vodič 1 vytvára magnetické pole a magnetická indukcia v každom mieste vodiča 2 podľa (15.15) má veľkosť: $B_1 = \mu_0\, I_1/(2\,\pi\, d)$. Magnetická indukcia od magnetickeho poľa vodiča 1 je v každom mieste vodiča 2 na tento vodič kolmá. Vodičom 2 preteká elektrický prúd I_2 a podľa (15.6) výsledná sila pôsobiaca na úsek vodiča dĺžky l sa rovná

$$F = \mu_0\, \frac{I_1\, I_2}{2\,\pi\, d}\, l \; . \tag{15.17}$$

Táto sila pôsobiaca medzi dvomi priamymi vodičmi zanedbateľného prierezu vo vákuu je základom pre definíciu jednotky elektrického prúdu v sústave SI. **1 ampér je elektrický prúd, ktorý ak preteká v dvoch paralelných vodičoch zanedbateľného kruhového prierezu a umiestnených vo vákuu vo vzdialenosti $1\,m$, vyvolá medzi vodičmi silu $2 \times 10^{-7}\,N$ na 1 meter dĺžky.**

15.6 Látky v magnetickom poli

Dosiaľ sme uvažovali o magnetických javoch, ktoré sa odohrávali vo vzduchu alebo vo vákuu. Tým sme si väčšinu skúmaných javov zjednodušili. Vákuum a aj vzduch sú prostredia, na ktoré nevplýva magnetické pole. Pri pokusoch s predmetmi z rozličných materiálov v blízkosti magnetu zistíme, že niektoré sa k magnetu pomerne silne priťahujú (oceľ, nikel a iné), kým iné na priblíženie magnetu viditeľne nereagujú (meď, hliník, sklo a iné). Sily, ktoré pôsobia na predmety druhej skupiny, sú veľmi malé a možno ich zistiť iba veľmi citlivými prístrojmi.

Látky, ktoré výrazne reagujú na priblíženie magnetu, nazývame **feromagnetické** (z latinského ferrum - železo). Ostatné látky nazývame **neferomagnetické**. O žiadnej látke nemožno povedať, že je nemagnetická. Veľmi rozdielne magnetické vlastnosti látok sú podmienené nerovnakými magnetickými vlastnosťami atómov, ich rozmiestením v látke a charakterom ich vzájomného pôsobenia (interakciou).

Elementárnymi nositeľmi magnetických vlastností v látkach sú atómy. Z magnetického hľadiska sú atómy zložité elektrodynamické systémy, ktorých vlastnosti možno dostatočne presne opísať iba metódami kvantovej teórie. Na pochopenie základných vlastností, ktoré chceme študovať, nám nateraz postačia predstavy Nielsa Bohra o planetárnom modeli atómu.

Magnetický moment elektrónu

Atóm je vo všeobecnosti elektricky neutrálny, pretože jeho celkový náboj je nulový, teda nevykazuje ani elektrický dipólový moment. O tejto skutočnosti sme hovorili v kapitole o dielektrických vlastnostiach materiálov. Iná situácia je v atóme z hľadiska jeho magnetického poľa. Elektricky neutrálny atóm vytvára vo svojom okolí magnetické pole a toto pole má dipólový charakter. Elektróny obiehajúce okolo jadra predstavujú slučkové prúdy a pohybujúci sa elektrón na jednej elektrónovej dráhe s polomerom r vytvára elektrický prúd so strednou hodnotou

$$\bar{I} = \frac{e}{T} = \frac{e\,v}{2\,\pi\,r}\,, \tag{15.18}$$

kde $T = 2\,\pi\,r/v$ je perióda obehu elektrónu okolo jadra po kruhovej dráhe s polomerom r. V prípade vodíkového atómu s elektrónom na základnej hladine je tento prúd približne $1\,mA$. S takýmto kruhovým prúdom sa spája

magnetický dipól, ktorý má **orbitálový magnetický moment** veľkosti

$$m = \bar{I}\, S = \bar{I}\, \pi\, r^2 = \frac{1}{2}\, e\, v\, r = \mu_B\, n \; , \tag{15.19}$$

kde S je plocha vymedzená dráhou elektrónu, n je prvé kvantové číslo a $\mu_B = 9,27 \times 10^{-24}\;\; A.m^2$ je **Bohrov magnetón**, ktorý reprezentuje magnetické pole elektrónu. Kvantovo mechanický model priniesol korekciu orbitálneho magnetického momentu a riešením Schrödingerovej rovnice vychádza: $m = \sqrt{l\,(l+1)}\mu_B$, kde l je vedľajšie (orbitálne) kvantové číslo.

Na druhej strane, s pohybom elektrónu po kruhovej dráhe je spojený tiež jeho moment hybnosti (**mechanický orbitálový moment**) L s veľkosťou: $L = m_e\, r\, v = \hbar\, n$, kde m_e je hmotnosť elektrónu a $\hbar$ je kvantum momentu hybnosti elektrónu. Magnetický moment možno potom vyjadriť pomocou jeho momentu hybnosti v tvare

$$m = \gamma\, L \; , \tag{15.20}$$

kde $\gamma = e/2\, m_e$ je pomer magnetického a mechanického momentu nazývaný magnetomechanický pomer, niekedy menej výstižne nazývaný **gyromagnetický pomer**. Vektory magnetického $\vec{m}$ a mechanického momentu $\vec{L}$ sú navzájom opačné a smerujú kolmo na rovinu elektrónovej dráhy (obr. 15.8).

Elektrón má okrem orbitálového magnetického momentu ešte vlastný **spinový magnetický moment** (z angl. spin - otáčať sa). Výsledný magnetický moment atómu je potom daný vektorovým súčtom orbitálových a spinových magnetických momentov jeho elektrónov. Jadro atómu prispieva k celkovému magnetickému momentu atómu veľmi málo.

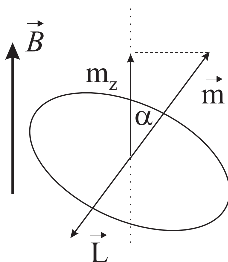
Atóm vo vonkajšom magnetickom poli

Teraz sa vráťme k atómu ako celku. Magnetické vlastnosti atómu možno charakterizovať prúdovými slučkami jednotlivých elektrónov, keďže vplyv jadra atómu možno zanedbať. Ak vložíme takúto prúdovú slučku s magnetickým momentom $\vec{m} = I\,\vec{S}$ (15.9) do vonkajšieho magnetického poľa s indukciou $\vec{B}$, bude jeho magnetická potenciálna energia

$$E_p = \vec{m} \cdot \vec{B} = m\, B\, \cos\alpha \; , \tag{15.21}$$

kde α je uhol, ktorý zvierajú vektory $\vec{m}$ a $\vec{B}$ (obr. 15.8). Slučka bude mať snahu natočiť sa do smeru vonkajšieho poľa a zaujať tak polohu s najmenšou energiou.

Podobná situácia nastáva pri vložení atómu do vonkajšieho magnetického poľa, pretože elektróny majú orbitálne magnetické momenty (15.19). Na rozdiel od makroskopickej slučky nemôže nadobúdať priemet m_z magnetického momentu elektrónu do smeru magnetického poľa ľubovoľnú veľkosť. Podľa kvantovej fyziky je veľkosť m_z kvantovaná vzťahom $m_z = m_l\,\mu_B$, kde $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l$ je magnetické kvantové číslo. Keďže uhol α môže nadobúdať len diskrétne hodnoty potom aj potenciálna energia (15.21) má tiež diskrétne hodnoty.



Obrázok 15.8: Prúdová slučka v magnetickom poli.

Ak to teraz zhrnieme: atóm v magnetickom poli sa dostáva do kvantového stavu, v ktorom zaujímajú magnetické momenty elektrónov polohy s najmenšou magnetickou potenciálnou energiou (15.21). Ale v súlade s Pauliho vylučovacím princípom sa energetické hladiny elektrónov v atóme rozštiepia na viac hladín (Zeemanov jav). Pôsobením vonkajšieho magnetického poľa vzniká magnetická polarizácia atómu, molekuly, a teda aj vloženej látky v danom poli.

15.7 Magnetická polarizácia

Okrem vektora magnetickej indukcie $\vec{B}$ je pre magnetické pole definovaný aj druhý vektor - **vektor intenzity magnetického poľa** $\vec{H}$. Vektor $\vec{H}$ sa používa pri opise magnetických javov predovšetkým v látkových prostrediach, hlavne vo feromagnetikách. Vo vákuu je definovaný vzťahom

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}\ , \qquad (15.22)$$

kde μ_0 je permeabilita vákua. Jednotkou $[H]$ v sústave SI je (A/m).

Teraz sa vráťme k fenomenologickému štúdiu správania sa látky v magnetickom poli a urobme kvantitatívny popis procesov. Majme magnetické pole

vo vákuu s indukciou $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$. Ak umiestnime látky do tohto poľa, nastane jej magnetická polarizácia. Výsledkom tohto javu je vznik indukovaného magnetického poľa s indukciou $\vec{B}_i$, ktoré v teórii magnetizmu označujeme pomocou **vektora magnetickej polarizácie** $\vec{J}$. Indukované magnetické pole sa superponuje s vonkajším magnetickým poľom a výsledné magnetické pole má indukciu

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_i = \vec{B}_0 + \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} \, . \tag{15.23}$$

Vektory $\vec{B}_0$ a $\vec{J}$ nemajú vo všeobecnosti rovnaký smer. Existuje však veľká skupina látok, ktoré označujeme ako magneticky mäkké látky (patria sem diamagnetiká a paramagnetiká), pri ktorých platí lineárna závislosť

$$\vec{J} = \chi_m \vec{B}_0 = \chi_m \mu_0 \vec{H} \, , \tag{15.24}$$

kde konštanta χ_m sa volá **magnetická susceptibilita**. Teraz môžeme predošlý vzťah (15.23) písať v tvare

$$\vec{B} = (1 + \chi_m) \vec{B}_0 = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \, , \tag{15.25}$$

kde

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{15.26}$$

je **relatívna permeabilita** a $\mu = \mu_0 \mu_r$ **permeabilita látky**.

Pre výpočet hodnôt magnetického poľa v neohraničených magneticky mäkkých látkach používame rovnaké vzťahy ako pre vákuum vynásobené relatívnou permeabilitou danej látky μ_r. Formálne teda vo vzťahu použijeme namiesto permeability vákua μ_0 permeabilitu látky μ.

15.8 Mikroskopická teória magnetických látok

Diamagnetizmus

Diamagnetické látky sa skladajú z atómov, resp. molekúl, ktoré majú celkom vykompenzované orbitálne a spinové magnetické momenty elektrónov. Preto je celkový magneticky moment atómu, resp. molekuly nulový. Pri vložení takejto látky do vonkajšieho magnetického poľa budú na jednotlivé orbity elektrónov (na elektrónové prúdové slučky) pôsobiť momenty síl, ktoré spôsobujú ich precesný pohyb ako pri rotujúcom zotrvačníku (Larmorova precesia). Pri tomto pohybe vzniká v každom atóme dodatkový magnetický moment, ktorý

je orientovaný proti smeru magnetického poľa. Výsledné pole v diamagnetickej látke má teda menšiu indukciu ako primárne pole vo vákuu. Preto je $\chi_m < 0$ a $\mu_r < 1$. Diamagnetizmus možno pozorovať pri inertných plynoch (hélium, neón, argón), iónoch tvoriacich mriežku niektorých kovov (voda, zlato, ortuť, bizmut, ...) a ďalších. Napr. pre bizmut je $\chi_m = -1,7\,10^{-4}$ a $\mu_r = 0,99983$ a pre vodu je $\chi_m = -9,0\,10^{-6}$ a $\mu_r = 0,999991$. Látky v supravodivom stave sa správajú ako ideálne diamagnetiká, t. j. úplne vytlačujú magnetické pole, teda $B = 0\,T$.

Paramagnetizmus

Paramagnetické látky sa skladajú z atómov, iónov alebo molekúl, ktoré majú nenulový permanentný magnetický moment. Takých látok je veľa, rovnako ako tých, ktoré moment nemajú, a sú teda diamagnetické. Jedným z dôvodov môže byť nepárny počet elektrónov v atóme, takže je v ňom nespárený, teda nevykompenzovaný orbitálny alebo spinový moment, a tak je prvok paramagnetický. Vplyvom tohto nekompenzovaného momentu sa atóm, resp. molekula v magnetickom poli správajú ako magnetický dipól. Toto však nemusí byť pravidlom, pretože napr. niektoré dvojatómové molekuly zložené z atómov s párnym počtom elektrónov sú napriek tomu paramagnetické, ako napr. kvapalný kyslík. Relatívna permeabilita paramagnetík je o niečo väčšia ako jedna. Paramagnetické sú platina, hliník, titán, urán a iné.

Atómy alebo molekuly paramagnetickej látky konajú neustály tepelný pohyb, ktorého energia je rádu $k\,T$. V dôsledku tohto pohybu v priestore neexistuje žiaden význačný smer a výsledná magnetizácia je nulová. Ak takúto látku vložíme do vonkajšieho magnetického poľa s indukciou B, pôsobí toto pole usporiadajúcim účinkom na jednotlivé magnetické momenty atómov, čoho výsledkom je zosilnenie magnetického poľa. Magnetická potenciálna energia atómu je rádu $m\,B$ (15.21). Vo vonkajších poliach, ktoré spĺňajú podmienku $m\,B \ll k\,T$, je magnetická polarizácia látky $\vec{J}$ lineárnou funkciou $\vec{B}$ (15.24).

Magnetizáciu paramagnetických látok prvýkrát spočítal r. 1905 P. Langevin. Jeho postup označujeme ako klasický, lebo pripúšťa možnosť ľubovoľnej orientácie magnetických momentov atómov v priestore (Maxwell-Boltzmannova štatistika). V modernej fyzike je priestorové usporiadanie magnetických momentov obmedzené podmienkou priemetu magnetického momentu do smeru poľa. Ukázal, že výsledná magnetická polarizácia danej látky sa dá zapísať

ako

$$J = n\,m\,L(\alpha)\ , \tag{15.27}$$

kde funkcia $L(\alpha) = \coth\alpha - \frac{1}{\alpha}$ sa nazýva Langevinova funkcia, pričom $\alpha = \frac{m\,B}{k\,T}$.

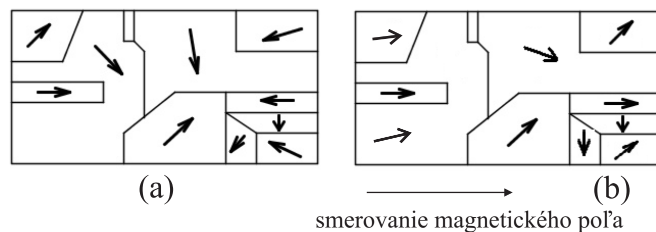
V slabých magnetických poliach je $m\,B \ll k\,T$, čiže $\alpha \ll 1$ a Langevinovu funkciu môžeme aproximovať ako $L(\alpha) = \alpha/3$. Tento fakt zapríčiňuje, že pri bežných poliach je magnetizácia priamoúmerná intenzite magnetického poľa a nepriamoúmerná teplote.

Feromagnetické materiály

Feromagnetické látky sa skladajú z paramagnetických atómov podobne ako paramagnetické látky. Napriek tomu sa magnetické nasýtenie dosiahne už v magnetickom poli bežného elektromagnetu. Feromagnetickými materiálmi sú napr. železo, kobalt, nikel, kadmium a ich zliatiny. Relatívna permeabilita feromagnetika dosahuje vysoké hodnoty $\mu_r = 10^3 - 10^6$, pričom magnetický moment jedného atómu feromagnetika sa výrazne nelíši od magnetického momentu paramagnetika. Feromagnetizmus nie je vlastnosťou jedného atómu, ale je dôsledkom interakcie elektrónov určitého súboru atómov. Vo feromagnetických látkach pôsobí medzi najbližšími susednými atómami osobitný druh síl (výmenné sily), ktoré spôsobujú paralelné usporiadanie magnetických momentov týchto atómov. Smer, v ktorom sa magnetické momenty atómov usporiadajú, nie je rovnaký pre celú vzorku feromagnetickej látky. Atómy, ktorých magnetické momenty sú usporiadané rovnakým smerom, tvoria **magnetickú doménu.** Magnetické domény sú teda magneticky nasýtené oblasti feromagnetickej látky. Ich objem je $10^{-6}\,mm^3$ až $10^{-1}\,mm^3$ (obr. 15.9(a)), pričom sú oddelené vrstvou asi $30\,nm$ (100 medziatómových vzdialeností) nazvanou **Blochova stena**. Jednotlivé domény sú však orientované chaoticky a navonok sa preto neprejavujú.

Pre feromagnetické látky sú dôležité dva parametre: tvar hysteréznej slučky a Curieho teplota. Ak zohrievame feromagnetikum, tak po presiahnutí určitej hraničnej - Curieho teploty sa stáva paramagnetikom. Tepelný pohyb atómov, molekúl je taký veľký, že spôsobí rozpad magnetických domén, čo sa prejaví aj na hodnote relatívnej permitivity materiálu, ktorá bude blízka jednej. Pri chladnutí roztavených feromagnetík pod Curieho teplotu sa vytvárajú Weissove

oblasti spontánnej magnetizácie - magnetické domény (nasýtenie domén nastáva spontánne, t. j. bez pôsobenia vonkajšieho magnetického poľa).

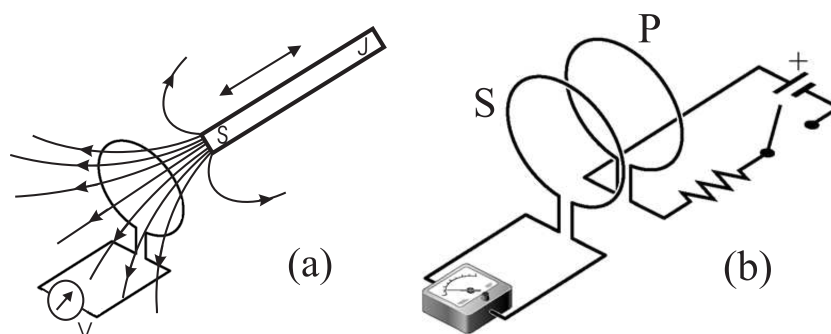


Obrázok 15.9: Znázornenie magnetických domén a ich natočenie vo vonkajšom magnetickom poli.

Okrem feromagnetických materiálov poznáme aj antiferomagnetiká a ferimagnetiká. Spiny paramagnetických elektrónov v susediacich atómoch týchto materiálov sú zorientované antiparalelne. V látke sú tak vytvorené vlastne dve podmriežky s opačne orientovanými spinmi rovnakej a rôznej veľkosti.

16 Elektromagnetická indukcia

Michal Faraday[1] v roku 1831 svojimi experimentmi objavil elektromagnetickú indukciu. Cieľom týchto experimentov bolo nájsť súvislosti medzi elektrickými a magnetickými javmi. Z predchádzajúcej kapitoly vieme, že elektrický prúd vytvára magnetické pole. Faraday zas ukázal, že magnetické pole môže byť zdrojom elektrického prúdu. Popíšme si podrobnejšie dva experimenty, ktoré nám budú slúžiť na výklad elektromagnetickej indukcie.



Obrázok 16.1: Vznik indukovaného elektromotorického napätia v cievke.

Zostavme jednoduchý obvod z cievky a galvanometra (obr. 16.1(a)). Keď približujeme tyčový magnet k cievke, ručička galvanometra sa vychýli na jednu stranu. Pri vzďaľovaní magnetu je výchylka opačná. Rýchlejší pohyb magnetu spôsobuje väčšiu výchylku galvanometra. Podobné výsledky dostaneme aj keď budeme pohyb vykonávať cievkou namiesto magnetu. Ak magnet a cievka sú navzájom v pokoji, výchylka galvanometra je nulová.

Iný typ experimentu, pri ktorom tiež bude vznikať napätie (elektromotorické), vytvoríme obdĺžnikovým závitom. Jedna strana závitu nech je po-

[1]MICHAL FARADAY (1791 – 1867), vynikajúci anglický fyzik a experimentátor. Preslávil sa objavmi zákonov elektrolýzy, diamagnetizmu, pôsobenia magnetického poľa na polarizované svetlo a iné. Patrí k najvýznamnejším fyzikom 19. storočia

hyblivá no celý závit je vložený do konštantného magnetického poľa kolmo na indukčné čiary. Ak budeme pohybovať pohyblivou časťou závitu konštantnou rýchlosťou, obvodom bude pretekať konštantný elektrický prúd. Veľkosť a smer pretekajúceho prúdu bude závisieť od smeru pohybu a rýchlosti, ktorou sa bude pohybovať pohyblivá časť závitu.

Nahraďme teraz magnet ďalšou cievkou pripojenou k zdroju jednosmerného napätia cez potenciometer (obr. 16.1(b)). Vznikne tak dvojica obvodov: primárny obvod s primárnou cievkou P a sekundárny obvod so sekundárnou cievkou S (podobnosť s transformátorom). Ak budeme zväčšovať napätie v primárnom obvode P pomocou potenciometra, tak v sekundárnom sa bude indukovať prúd - ručička galvanometra sa vychýli jedným smerom. Čím bude rýchlejšia zmena, tým viac sa vychýli ručička na galvanometri. Pri zmene prúdu primárnou cievkou sa mení jej magnetické pole, ktoré zasahuje do sekundárnej cievky presne ako pri pohybe magnetu.

Z vykonaných pokusov vyplýva viacero informácií. Pri vzájomnom pohybe magnetu a cievky sa indukuje v druhej cievke napätie, ktoré sa nazýva **elektromotorické napätie**. Prúd, ktorý pri tom v obvode vzniká, sa nazýva **indukovaný prúd**. Ďalej, smer indukovaného prúdu závisí od zmeny magnetického poľa (približovanie alebo vzďaľovanie magnetu). Veľkosť elektromotorického napätia závisí od rýchlosti zmeny magnetického poľa.

16.1 Magnetický indukčný tok

Podobne ako používame tok intenzity elektrického poľa, definujeme si veličinu magnetický indukčný tok v magnetickom poli. Elementárny magnetický tok je definovaný ako skalárny súčin vektora magnetickej indukcie a vektora elementu plochy $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$. **Magnetický indukčný tok určitou plochou je integrálom elementárneho magnetického toku cez túto plochu**

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \,. \qquad (16.1)$$

Jednotkou magnetického indukčného toku je **weber**[2] ($Wb = T.m^2$).

Už vieme, že magnetické indukčné čiary vytvárajú uzavreté krivky, ktoré nikde nezačínajú a nikde nekončia (obr. 15.2). Takže počet čiar vstupujúcich

[2]WILHELM EDUARD WEBER (1804 – 1891) bol nemecký profesor fyziky na Univerzite v Göttingene, súčasník a spolupracovník K. F. Gaussa.

do objemu ohraničeného plochou S je rovný počtu čiar z objemu vystupujúcich, teda magnetický indukčný tok cez uzavretú plochu je nulový

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \ . \tag{16.2}$$

Táto rovnica sa nazýva **Gaussov zákon magnetického poľa** a je jednou zo základných Maxwellových rovníc popisujúcich elektromagnetické pole.

16.2 Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie

Z predošlých experimentov je zrejmé, že elektromotorické napätie sa v cievke indukuje iba pri časovej zmene magnetického poľa, ktoré prechádza cievkou. Z týchto faktov vyplývajú nasledujúce informácie. Ak máme cievku s plochou S v časovo nepremennom magnetickom poli s indukciou $\vec{B}$, tak bude ňou prechádzať magnetický indukčný tok Φ, ktorý sa dá vypočítať pomocou vzťahu (16.1). Elektromotorické napätie sa však indukuje iba pri časovej zmene magnetického poľa, ktoré prechádza cievkou. Teda veľkosť **elektromotorického napätia sa vypočíta ako záporná časová derivácia magnetického indukčného toku prechádzajúceho cievkou**

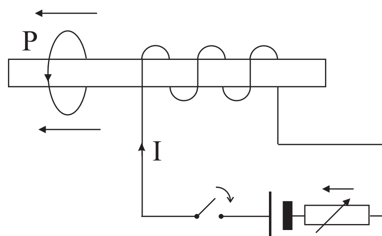
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \ . \tag{16.3}$$

Zmena magnetického toku v čase môže nastať z rôznych dôvodov, a to vplyvom: a) veľkosti magnetickej indukcie $\mid \vec{B} \mid$, b) uhla medzi vektorom $\vec{B}$ a vektorom plošného elementu $d\vec{S}$ a c) veľkosti plochy závitu.

16.3 Lenzov zákon

Z vysvetľovania elektromagnetickej indukcie vieme, že pri zväčšovaní magnetického indukčného toku plochou cievky vzniká v nej indukovaný prúd opačného smeru ako pri zmenšovaní indukčného toku. Na zistenie smeru indukovaného prúdu vplyvom zmeny indukčného toku si zostavme nasledujúci experiment. Cievku pripojíme k zdroju napätia cez reostat a vypínač (obr. 16.2). Do cievky vložíme dlhé jadro z mäkkej ocele na zväčšenie magnetického indukčného toku plochou prstenca P. Prstenec nech je zavesený na dvoch vláknach tak, aby sa nedotýkal jadra cievky. Keď cievkou prechádza konštantný prúd, je magnetický indukčný tok plochou prstenca konštantný. V prípade zmeny prúdu

v cievke sa mení aj jej magnetické pole, čím nastáva zmena indukčného toku v prstenci.



Obrázok 16.2: K vysvetleniu Lenzovho zákona.

Pri pokuse budeme pozorovať, že pri zväčšovaní prúdu (pri zopnutí) v cievke sa prstenec od cievky odpudzuje. V prípade poklesu prúdu sa zase prstenec k cievke priťahuje (obr. 16.2). Z kap. 15.5 (Sila medzi dvomi rovnobežnými vodičmi) vieme, že vodiče s prúdmi súhlasných smerov sa priťahujú, vodiče s prúdmi nesúhlasných smerov sa odpudzujú. Z toho vyplýva, že pri zväčšovaní prúdu v cievke sa v odpudzovanom prstenci indukuje prúd, ktorý má nesúhlasný smer a naopak, pri poklese prúdu v cievke sa v priťahovanom prstenci indukuje prúd, ktorý má súhlasný smer s prúdom v cievke.

Indukovaný prúd v prstenci má vždy taký smer, že svojím magnetickým poľom zmenšuje vnútri prstenca zmenu magnetického poľa cievky a tým aj zmenu indukčného toku plochou prstenca. Hovoríme, že indukovaný prúd pôsobí svojím magnetickým poľom proti zmene magnetického poľa, ktorá ho vyvolala. Tento všeobecne platný záver formuloval v roku 1834 E. Ch. Lenz[3] a volá sa **Lenzov zákon: Smer indukovaného elektrického prúdu je taký, že magnetické pole indukovaného elektrického prúdu svojími účinkami pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala.** Tento zákon je dôsledkom základného prírodného zákona – zákona zachovania energie. Ak by tomu tak nebolo, tak po iniciovaní elektromagnetickej indukcie by proces samovoľne a neohraničene narastal.

Lenzov zákon platí nielen pre tenké vodiče, ale aj pre prúdy indukované vo veľkých (plných) vodičoch v tvare plechu, platní atď. Voláme ich aj **Foucaultove[4] prúdy** alebo **vírivé prúdy**. Pri pohybe vodiča v magnetickom poli

[3]EMILIJ CHRISTANOVIČ LENZ (1804 – 1865), ruský fyzik nemeckého pôvodu.
[4]LEON JEAN BERNARD FOUCAULT (1819 – 1868) francúzsky fyzik, ktorý medzi inými dokázal svojím Foucaultovým kyvadlom, že Zem sa otáča.

vznikajú v ňom vírivé prúdy, ktoré pôsobia svojími silovými účinkami proti tomuto pohybu, t. j. brzdia pohyb vodiča v magnetickom poli. Vírivé prúdy vznikajú tiež ak sa vodič nachádza v premenlivom magnetickom poli (napr. pri prechode striedavého prúdu vodičom). Majú však aj nežiaduce tepelné účinky.

16.4 Vlastná a vzájomná indukcia

Uzavretý závit, cievka alebo obvod, ktorými preteká konštantný elektrický prúd I je zdrojom stacionárneho magnetického poľa. Ak si vyberieme nejakú plochu v blízkosti tohto obvodu, bude ním pretekať konštantný magnetický indukčný tok. V prípade časovej zmeny elektrického prúdu $I(t)$ sa mení i magnetické pole generované daným obvodom (obr. 16.1(b)), a tým aj magnetický indukčný tok $\Phi(t)$. Táto zmena indukčného toku vedie podľa Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie k vzniku elektromotorického napätia (16.3). Takýto jav voláme **samoindukcia**, alebo **vlastná indukcia**.

Ak závitom preteká elektrický prúd potom magnetický tok pretekaný daným závitom, cievkou, alebo uzatvoreným vodičom iného tvaru sa dá vyjadriť ako

$$\Phi = L\, I \,, \tag{16.4}$$

kde konštanta úmernosti L sa volá **vlastná indukčnosť - indukčnosť cievky** a závisí od permeability prostredia vnútri cievky, počtu závitov a ich geometrického tvaru. Jednotka indukčnosti sa volá **henry**[5] ($H = V\,s/A = Wb/A$). Indukčnosť L je popri odpore R a kapacite C ďalším základným parametrom vodičov.

Uvažujme solenoid polomeru R a dĺžky $l \gg R$, ktorý má N závitov (obr. 15.7). Ak zanedbáme okrajové efekty, môžeme magnetické pole vnútri solenoidu považovať za homogénne s magnetickou indukciou B podľa vzťahu (15.16). Celkový magnetický indukčný tok solenoidu je súčtom tokov cez všetky závity, čiže $\Phi = N\,B\,S$, kde $S = \pi\,R^2$. Z definičného vzťahu vlastnej indukčnosti dostaneme

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0\,N^2\,\pi\,R^2}{l} \,. \tag{16.5}$$

Pomocou indukčnosti (16.4) a Faradayovho zákona (16.3) sa dá **indukované elektromotorické napätie v cievke** vyjadriť ako

$$\varepsilon_i = -L\,\frac{dI(t)}{dt} \,. \tag{16.6}$$

[5] JOSEPH HENRI HENRY (1797−1875), po ktorom je pomenovaná jednotka indukčnosti.

Zo vzťahu je vidieť, že veľkosť prúdu na indukované elektromotorické napätie nemá vplyv, na rozdiel od veľkosti jeho časovej zmeny.

Uvažujme teraz dva uzavreté obvody s prúdmi I_1 a I_2. Plochou každého obvodu preteká okrem indukčného toku magnetického poľa vlastného obvodu i magnetický indukčný tok súvisiaci s tým, že tento obvod sa nachádza i v magnetickom poli druhého obvodu. Zmena prúdu v jednom vyvolá zmenu magnetického indukčného toku v obidvoch obvodoch. Tomuto javu hovoríme **vzájomná indukcia.** Teda, ak je obvod 2 umiestnený v magnetickom poli obvodu 1, bude ním prechádzať dodatočný magnetický indukčný tok Φ_{21}, daný vzťahom

$$\Phi_{21} = M_{21}\, I_1 \;, \tag{16.7}$$

kde M_{21} je konštanta úmernosti. Analogicky to platí i opačne pre dodatočný magnetický indukčný tok Φ_{12} od obvodu 2 s prúdom I_2. Experimentálne i teoreticky sa dá ukázať, že $M_{21} = M_{12} = M$. M sa volá **koeficient vzájomnej indukčnosti** dvoch obvodov. Zmena prúdu I_1 teda indukuje napätie ε_{i2} v obvode 2, ktoré sa dá vypočítať podľa vzťahu

$$\varepsilon_{i2} = -M\,\frac{dI_1}{dt} \;. \tag{16.8}$$

Pre elektromotorické napätie ε_{i1} v obvode 1 od prúdu I_2 platí analogický vzťah.

16.5 Energia magnetického poľa

Tak ako v elektrickom poli v prípade kondenzátora (12.34) je uložená elektrická energia, tak aj v magnetickom poli sa nachádza uložená energia. Vypočítajme si teda, aká magnetická energia je uložená v cievke, pričom získaný výsledok potom zovšeobecníme na magnetické pole.

Majme elektrický RL obvod, ktorý sa skladá zo zdroja napätia U, cievky s vlastnou indukčnosťou L, odporu R a vypínača. Podľa II. Kirchhoffovho zákona pre daný RL obvod platí:

$$U = R\,I + L\frac{dI}{dt} \;. \tag{16.9}$$

Ak rovnicu (16.9) vynásobíme prúdom I, dostaneme:

$$U\,I = R\,I^2 + L\,I\frac{dI}{dt} \;, \tag{16.10}$$

pričom $U\,I$ je celkový výkon zdroja dodávaný do obvodu. Práca, ktorú zdroj dodal do obvodu počas doby t prechodového deja, je

$$W = \int_0^t U\,I\,dt = \int_0^t R\,I^2\,dt + \int_0^t L\,I\frac{dI}{dt}\,dt\,. \tag{16.11}$$

Prvý člen na pravej strane predstavuje Joulovo teplo (14.22). Druhý člen predstavuje výkon potrebný na vytváranie magnetického poľa v cievke. Na vytvorenie konečného magnetického poľa v cievke, t. j. poľa, ktoré zodpovedá ustálenému elektrickému prúdu I, bolo potrebné vynaložiť prácu

$$W_m = \int_0^I L\,I\,dI = \frac{1}{2}L\,I^2\,. \tag{16.12}$$

Táto práca sa podľa zákona zachovania energie rovná energii obsiahnutej v magnetickom poli solenoidu.

Majme solenoid, ktorý má dĺžku l, počet závitov N, plocha jedného závitu je S a tečie ním elektrický prúd I. Ak uvážime vzťah (16.5) pre vlastnú indukciu solenoidu, potom energia magnetického poľa solenoidu bude

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\,N^2\,S}{l}I^2\,. \tag{16.13}$$

Teraz si vyjadríme energiu magnetického poľa solenoidu pomocou vektorov magnetického poľa $\vec{B}$ a $\vec{H}$. Ak si prúd I v predošlom vzťahu vyjadríme zo vzťahu (15.16, magnetické pole cievky) ako $I = B\,l/\mu_0\,N$, dostaneme

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}S\,l\,. \tag{16.14}$$

kde $S\,l$ je objem cievky. Tento vzťah je špeciálnym prípadom vyjadrenia energie magnetického poľa uloženého v cievke. No pomocou vyjadrenia: $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ môžeme, podobne ako v prípade elektrostatického poľa (13.14) definovať **hustotu energie magnetického poľa** vzťahom $w_m = W_m/S\,l$ a dostaneme

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\,. \tag{16.15}$$

17 Optika

V tejto časti sa budeme zaoberať šírením svetla v optických sústavách. Svetlo je elektromagnetické žiarenie, ktorého spektrum zahrňuje veľmi širokú oblasť vlnových dĺžok od γ-žiarenia až po rozhlasové vlny. V oblasti vlnových dĺžok meraných vo vákuu od $100\,nm$ až k $1\,mm$ označujeme elektromagnetické žiarenie ako optické žiarenie. Krátkovlnnú časť tejto oblasti (od $100\,nm$ do $380\,n$m) voláme ultrafialovým žiarením (UV), dlhovlnnú oblasť (od $780\,nm$ do $1\,mm$) infračerveným žiarením (IR). Oko je citlivé len na úzky interval vlnových dĺžok od $380\,nm$ do $780\,nm$. Elektromagnetické žiarenie v tejto oblasti voláme viditeľným svetlom.

Šírenie elektromagnetického žiarenia popisujeme pomocou vlnovej rovnice, ktorej riešenie sú vlny šíriace sa v priestore. Najjednoduchší prípad je postupná vlna v smere osi x: $y(x,t) = A\sin[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \varphi)]$, kde A je amplitúda , T perióda, λ vlnová dĺžka, $v = \lambda/T$ rýchlosť a φ je fáza vlny. Pre jednoduchšie pochopenie šírenia sa vlnenia v priestore ho popisujeme pomocou **vlnoplôch**. Vlnoplochou rozumieme geometrický útvar bodov daného vlnenia, ktoré majú rovnakú fázu. Šírenie vlnoplôch v priestore sa riadi **Huygensovým**[1] **princípom**: **Každý bod vlnoplochy predstavuje nový zdroj vlnenia, z ktorého vychádzajú elementárne guľové plochy, ktoré keď poskladáme, dostaneme novú posunutú vlnoplochu.** V našom prípade sa budeme zaoberať len rovinnými vlnoplochami.

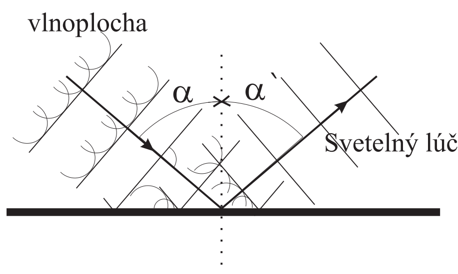
Veľmi dôležitým parametrom pri charakteristike optického prostredia je **index lomu**. Index lomu závisí od vlnovej dĺžky svetla. Pre svetlo určitej vlnovej dĺžky λ definujeme index lomu n ako **pomer rýchlosti svetla vo**

[1]CHRISTIAN HUYGENS (1629 – 1695) holandský matematik a fyzik, zakladateľ vlnovej optiky. Pozoroval planéty pomocou vlastného ďalekohľadu. V roku 1690 vydal v Leidene *Traité de la lumiére*, kde v 6 kapitolách podal úvahy o podstate svetla.

vákuu c k rýchlosti svetla v_λ v danom prostredí:

$$n = \frac{c}{v_\lambda}. \tag{17.1}$$

Podľa toho, ako sa index lomu v prostredí mení, rozdeľujeme prostredia na niekoľko skupín: rovnorodé (izotropné), nerovnorodé a anizotrópne prostredie. Keď máme dve prostredia s rôznym indexom lomu, prostredie s menším indexom lomu nazývame **opticky redšie** prostredie a prostredie s väčším indexom lomu ako **opticky hustejšie** prostredie.



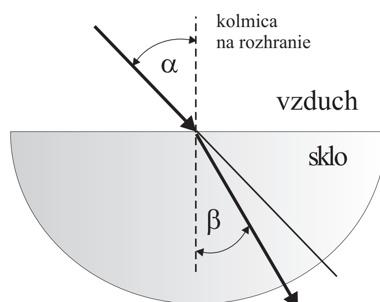
Obrázok 17.1: Odraz vlnoplochy - svetelného lúča od zrkadla.

Pomocou obrázku 17.1 si vysvetlíme odraz rovinnej vlnoplochy od rovinného zrkadla pomocou Huygensovho princípu. Na obrázku je znázornená rovinná vlnoplocha, ktorá dopadá šikmo na rovinné zrkadlo pod uhlom α od kolmice. Po dopade tejto vlny na zrkadlo nastáva odraz daného vlnenia. Vlnoplochu odrážajúceho sa rovinného vlnenia môžeme rozdeliť na dve časti, jedna časť vlnoplochy už dopadla na zrkadlo, kým druhá časť je ešte v priestore pred ním. Tá časť, čo už dopadla, sa správa ako nový zdroj vlnenia, vznikajú polguľové vlnoplochy. Ich poskladaním vzniká nová odrazená vlnoplocha, ktorá sa šíri opätovne do priestoru. Druhá časť postupne dopadá na zrkadlo a po dopade nastáva jej odraz už popísaným spôsobom. Týmto postupom prebehne postupne odraz celého rovinného vlnenia.

Kvôli zjednodušeniu znázorňovania šírenia sa vlnenia, vlnoplochy v prostredí (optickými sústavami) zavádzame pojem **svetelný lúč.** Svetelný lúč **má smer šírenia sa elektromagnetického vlnenia a má zhodný smer s normálou na vlnoplochu** (obr. 17.1).

17.1 Základné zákony geometrickej optiky

Prvé poznatky o šírení svetla sa postupne dopĺňali novými a formulovali sa v zákonoch, ktoré určovali šírenie svetla pri rôznych podmienkach. Experimenty dokázali, že svetlo sa v rovnorodom prostredí šíri priamočiaro, bol objavený zákon odrazu a lomu a zistilo sa, že optické deje sú vratné. V geometrickej optike sa podarilo P. Fermatovi[2] nájsť súvislosť medzi jednotlivými zákonmi a princípmi formuláciou **princípu minimálneho času**. **Podľa tohto princípu si svetlo zo všetkých možných dráh spájajúcich dva body vyberá vždy takú dráhu, ktorú prejde za najkratší čas.**



Obrázok 17.2: Lom svetelného lúča na rozhraní dvoch prostredí.

Na základe procesov čo boli popísané, sa dajú formulovať **štyri zákony geometrickej optiky.** Tieto zákony možno formulovať aj bez využitia akejkoľvek predstavy o fyzikálnej povahe svetla. Sú to:

1. **Zákon priamočiareho šírenia sa svetla.** Vo vákuu a rovnorodom prostredí sa svetlo šíri priamočiaro a lúče sa znázorňujú ako priamky - svetelný lúč.

2. **Zákon nezávislosti svetelných lúčov.** Tým istým bodom priestoru môže súčasne prechádzať rôznym smerom viacero svetelných lúčov a zároveň sa neovplyvňujú.

3. **Zákon odrazu svetla.** Kolmica na rozhranie dvoch prostredí určuje s dopadajúcim lúčom rovinu dopadu. Ak dopadajúci lúč dopadá pod

[2]PIERRE de FERMAT (1601 – 1665) bol francúzsky matematik. Zaslúžil sa o rozvoj matematiky v niekoľkých oblastiach: teória čísel, teória pravdepodobnosti i matematická analýza.

uhlom α meraným od kolmice (obr. 17.1), potom lúč po odraze zostáva v rovine dopadu a zviera s kolmicou na rozhranie uhol α' rovný uhlu α

$$\alpha = \alpha'. \tag{17.2}$$

4. **Zákon lomu.** Lúč po dopade na rozhranie dvoch prostredí sa odráža a súčasne aj láme (obr. 17.2). Lomený lúč zotrváva v rovine dopadu, pričom zmení smer svojho šírenia a zviera s kolmicou uhol β. Medzi uhlom dopadu α a uhlom lomu β platí **Snellov[3] zákon:**

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{n_2}{n_1}\,, \tag{17.3}$$

kde n_1 a n_2 sú indexy lomu daných prostredí.

Pri prechode svetelného lúča do opticky hustejšieho prostredia ($n_2 > n_1$) nastáva lom ku kolmici $\beta < \alpha$. Ak však svetlo prechádza z prostredia opticky hustejšieho (sklo, voda) do prostredia opticky redšieho (vzduch, vákuum), nastáva lom od kolmice a platí $\beta > \alpha$. Je zrejmé, že pri určitom **medznom uhle** dopadu α_M bude uhol $\beta = 90^o$ a vtedy sa lomený lúč bude šíriť rozhraním. Pre všetky uhly $\alpha > \alpha_M$ nastáva potom už len totálny odraz.

17.2 Optické zobrazovanie

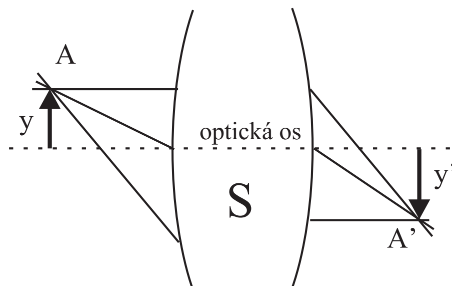
Zákony geometrickej optiky rozpísané v predchádzajúcej kapitole sú základom optického zobrazovania. Hlavnou úlohou optického zobrazovania je spraviť predmety viditeľnými na inom mieste s dobrou viditeľnosťou a ostrosťou obrazu.

Útvar, ktorý zobrazujeme, sa nazýva všeobecne **predmet** - A. Medzi najjednoduchšie typy predmetu patrí (svetelný) bod alebo priamka. Pri zobrazovaní sa využíva to, že zväzok svetelných lúčov, ktoré sa pretínajú v jednom bode predmetu, vstupujú do optickej sústavy S, ktorou prechádzajú, pričom jej vplyvom nastáva ich lom prípadne odraz (obr. 17.3). Zväzok svetelných lúčov sa teda transformuje na iný zväzok s vrcholom v bode A', ktorý voláme

[3]WILLEBRORD SNELLIUS (1580 – 1626) bol nemecký fyzik, astronóm, matematik i prekladateľ. Na základe veľkého počtu experimentov a štúdia prác (napr. Johanna Keplera) dospel okolo roku 1621 k objavu zákona lomu svetelných lúčov. Pracoval tiež na geodetických prácach, pri ktorých používal triangulačnú sieť tak dôsledne a novátorsky, že dostal prívlastok otec triangulácie.

obrazom. Obrazom svetelného alebo osvetleného predmetu je súhrn obrazov jednotlivých bodov predmetu, pričom vytvárajú výsledný obraz, napr. priamku. Priestor, v ktorom sa nachádza vzhľadom na optickú sústavu predmet, sa volá **predmetový priestor** a v **obrazovom priestore** vzniká obraz.

V prípade, že sa lúče po prechode optickou sústavu pretínajú, tak hovoríme o **skutočnom (reálnom) obraze** (obr. 17.3). Tento obraz možno zaznamenať na tienidle. Pokiaľ sú lúče po prechode optickou sústavou rozbiehavé a obraz môžeme skonštruovať len mysleným predĺžením daných lúčov, hovoríme o **zdanlivom (neskutočnom, virtuálnom) obraze** (obr. 17.7).



Obrázok 17.3: Charakteristické veličiny optického zobrazovania.

Lámavé plochy optických sústav majú prevažne guľový alebo rovinný tvar. Guľové plochy sú usporiadané tak, že ich stred krivosti leží na jedinej priamke pomenovanej **optická os**. Rovinné plochy bývajú k optickej osi kolmé. Takejto sústave potom hovoríme centrovaná sústava.

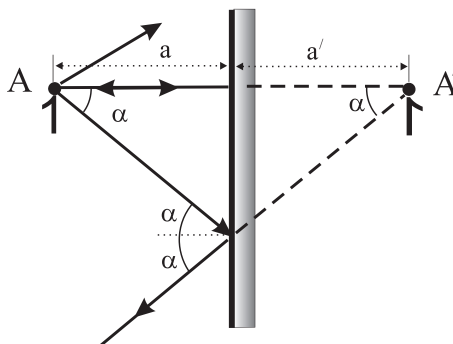
Každá optická sústava zobrazuje s určitým zväčšením Z. Na obrázku 17.3 vidíme, že priamka dĺžky y kolmá k optickej osi sa zobrazuje znovu ako priamka dĺžky y', znovu kolmo k danej osi. Podiel

$$Z = \frac{y'}{y} \tag{17.4}$$

voláme **priečnym zväčšením** Z. Ak je $|Z| > 1$, hovoríme o zväčšenom obraze (obr. 17.3), v prípade $|Z| < 1$, je obraz zmenšený. Ak je obraz nad optickou osou, má y kladné znamienko a v príprade obrazu pod optickou osou má y záporné znamienko (znamienková konvencia). Ak $Z > 0$, majú priamky y, y' rovnaký smer - vzniká priamy obraz a v prípade $Z < 0$ je obraz prevrátený (obr. 17.3).

17.3 Zobrazovanie rovinným zrkadlom

Zrkadlo je povrch, ktorý odráža zväzok svetelných lúčov prakticky do jedného smeru. Iné povrchy ich rozptyľujú do všetkých možných smerov alebo ich pohlcujú. Leštený povrch kovu sa správa ako zrkadlo, betónová stena však nie. Najjednoduchšie je rovinné zrkadlo. Rovinné zrkadlá používané v bežnom živote majú zrkadliacu vrstvu obyčajne na zadnej stene sklennej dosky.



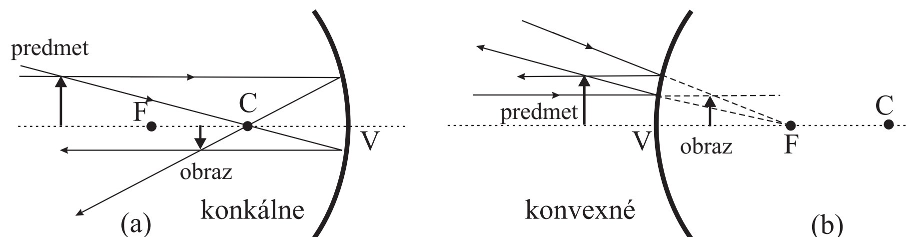
Obrázok 17.4: Zobrazovanie pomocou rovinného zrkadla.

Majme bod A pred rovinným zrkadlom, z ktorého vychádza rozbiehavý zväzok lúčov (obr. 17.4). Lúče sa po dopade na zrkadlo odrážajú podľa zákona odrazu. Keďže aj odrazené lúče sú rozbiehavé, pozorovateľovi sa zdá, že lúče vychádzajú spoza zrkadla z jedného bodu A'. Polohu tohto bodu A' vieme nájsť konštrukčne len mysleným predĺžením odrazených lúčov na základe uhla dopadu a matematických pravidiel. A' je zdanlivý obraz bodu A. Je to bod súmerne združený s bodom A vzhľadom na rovinu zrkadla. Ak je predmet vzdialený od zrkadla vo vzdialenosti a, potom obraz je vo vzdialenosti a', pričom z obrázku 17.4 je zrejmé, že $a = a'$. Keďže kolmosť sa pri zobrazovaní zachováva, môžeme takýmto postupom zostrojiť obraz ľubovoľných bodov, alebo celého predmetu.

Vzniknutý **obraz predmetu vytvorený rovinným zrkadlom je neskutočný, rovnako veľký ako predmet a súmerne združený s predmetom podľa roviny zrkadla**. Použitie rovinných zrkadiel je veľmi rozšírené v domácnostiach, ale nájdu uplatnenie aj v iných odboroch (meracie prístroje, astronomické zariadenia, periskop a pod.).

17.4 Zobrazovanie pomocou guľovej plochy

Pri zobrazovaní využívame hlavne paraxiálny priestor, v ktorom sú paraxiálne lúče v blízkosti optickej osi. V paraxiálnom zobrazení sa bod zobrazí ako bod, priamka ako priamka a rovina ako rovina.



Obrázok 17.5: Zobrazovanie pomocou guľového zrkadla.

Zrkadliacu plochu guľových zrkadiel tvorí časť pokovenej guľovej plochy (guľový vrchlík). Keď svetlo odráža vnútorná plocha gule, hovoríme o **dutom zrkadle (konkávne)**, keď vonkajšia plocha, vzniká **vypuklé zrkadlo (konvexné)**. Stred guľovej plochy (obr. 17.5) je stred krivosti zrkadla - C a polomer guľovej plochy je polomer krivosti - $r = |CV|$, kde V je vrchol zrkadla. V strede vzdialenosti medzi vrcholom V a stredom krivosti C sa nachádza **ohnisko** F. Vzdialenosť ohniska F od vrcholu zrkadla V sa označuje f a nazýva sa **ohnisková vzdialenosť**.

Pri konštrukcii obrazu predmetu na guľovom zrkadle (obr. 17.5) využívame vlastnosti nasledujúcich lúčov :

1. Lúč prechádzajúci stredom krivosti dopadá na zrkadliacu plochu kolmo a odráža sa do tej istej priamky, len v opačnej orientácii.

2. Lúč rovnobežný s optickou osou zrkadla sa na zrkadliacej ploche odrazí do ohniska.

3. Lúč smerujúci do ohniska sa od zrkadliacej plochy odrazí rovnobežne s optickou osou.

Pri riešení úloh platí vzťah, ktorý nazývame **zobrazovacia rovnica pre guľové zrkadlá**:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{r}, \tag{17.5}$$

kde a je vzdialenosť predmetu od vrcholu guľového zrkadla, a' je vzdialenosť obrazu od vrcholu a r je polomer krivosti guľového zrkadla - plochy.

Guľové zrkadlá sa používajú v praxi pri zobrazovaní a v meracích prístrojoch. Duté zrkadlá sa používajú v medicíne, na osvetľovanie v mikroskopoch a zrkadlových ďalekohľadoch. Zväzok lúčov vychádzajúci z ohniska sa odráža ako zväzok lúčov rovnobežných s optickou osou. Keď umiestnime v ohnisku takéhoto zrkadla bodový zdroj svetla, zrkadlo odráža rovnobežný zväzok lúčov, pričom so vzdialenosťou ubúda svetla len nepatrne. To je podstata reflektorov, ktoré sa používajú v motorových vozidlách, na hľadanie i vo vreckových lampách.

17.5 Zobrazovanie pomocou šošoviek

Šošovka je vyrobená z opticky čireho prostredia s dvoma lámavými plochami, pričom ich centrálne osi splývajú - centrálna os šosovky. Rozoznávame dva druhy šošoviek: **spojky** a **rozptylky**. Svetlo dopadá na povrch šošovky, kde sa láme, ďalej prechádza šošovkou a znova sa láme na rozhraní šošovky a vzduchu. Pri každom lome sa môže meniť smer chodu svetla. Ak máme šošovku s dvoma guľovými plochami s polomerom r_1 a r_2, indexe lomu n a je vo vzduchu, tak jej ohnisková vzdialenosť je určená rovnicou

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{17.6}$$

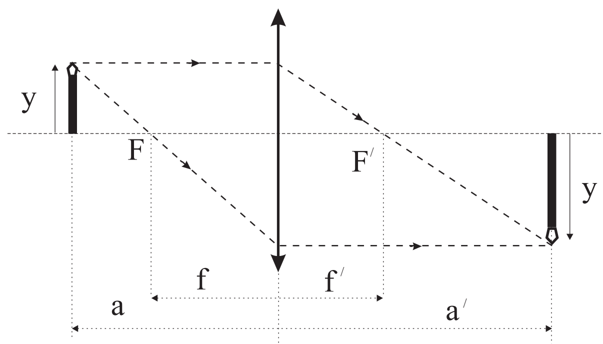
Spojka má polomer krivosti r_1 (r_2) kladný a jej predná plocha šošovky je vypuklá do predmetového (obrazového) priestoru. Ak je predná plocha šošovky dutá v predmetovom (obrazovom) priestore, potom je polomer krivosti r_1 (r_2) záporný a ide o rozptylku. Pre polomer krivosti r_2 platí to isté s tým rozdielom, že ide o plochu v obrazovom priestore. V klasickom prípade zobrazovania šošovkami používame **tenkú šošovku**, zanedbávame rozmer šošovky, na ktorej nastáva len jeden lom podľa stanovených pravidiel.

Veličina $\varphi = \frac{1}{f}$ sa volá **optická mohutnosť šošovky**. Jej jednotkou je **dioptria,** je to optická mohutnosť šošovky s ohniskovou vzdialenosťou $1\,m$. Ohnisková vzdialenosť aj dioptria majú kladnú hodnotu pre spojky a zápornú pre rozptylky.

Zobrazenie šošovkou sa riadi **zobrazovacou rovnicou tenkej šošovky**:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \tag{17.7}$$

kde a je predmetová vzdialenosť, a' obrazová vzdialenosť a f je ohnisková vzdialenosť (obr. 17.6). Pre jednotlivé parametre zobrazovacej rovnice platí znamienková konvencia. Číselnú hodnota a dosadzujeme do zobrazovacej rovnice kladnú, ak sa predmet nachádza v predmetovom priestore. Číselná hodnota a' má kladné znamienko, ak je obraz v obrazovom priestore a záporné, ak je obraz v predmetovom priestore.



Obrázok 17.6: Zobrazovanie pomocou spojky.

Určiť polohu a veľkosť obrazu môžeme pri tenkej šošovke pomocou lúčového obrazca na obrázku 17.6 ako priesečník "špeciálnych" lúčov vyslaných z predmetového bodu (koniec sviečky). Špeciálne lúče sú:

1. lúč šíriaci sa od predmetu rovnobežne s optickou osou sa po prechode šošovkou láme tak, že prechádza obrazovým ohniskom F',
2. lúč idúci od predmetu do predmetového ohniska F sa po prechode šošovkou láme tak, že ide rovnobežne s optickou osou,
3. lúč mieriaci od predmetu do stredu šošovky sa neláme.

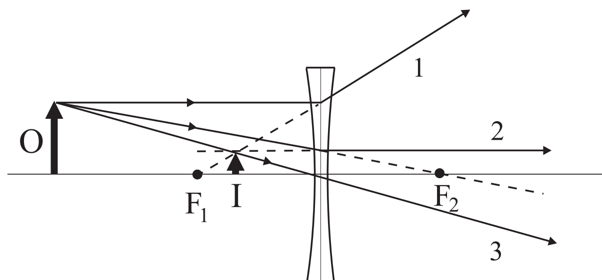
Zo zobrazovacej rovnice vyplýva, že keď sa a zväčšuje, zmenšuje sa a'. Pre $a \to \infty$ dopadajú na šošovku zväzky rovnobežné s osou. Tieto sa po lome v šošovke zbiehajú v obrazovom ohnisku a $a' = f$. Keď $a = f$, tak $a' \to \infty$, takže svetelné zväzky sú po lome rovnobežné s optickou osou a obraz sa nachádza v nekonečne.

Pri zobrazovaní pomocou spojky rozlišujeme tri prípady typu obrazu

1. ak $a > r_2$, obraz je **skutočný, prevrátený a zmenšený**,
2. ak $r_2 > a > f$, obraz je **skutočný, prevrátený a zväčšený**,

3. ak $a < f$, obraz je **neskutočný, priamy a zmenšený**.

V prípade rozptylky (obr. 17.7) je to jednoduchšie, lebo typ obrazu **neskutočný, priamy a zmenšený** nezávislý od polohy predmetu.



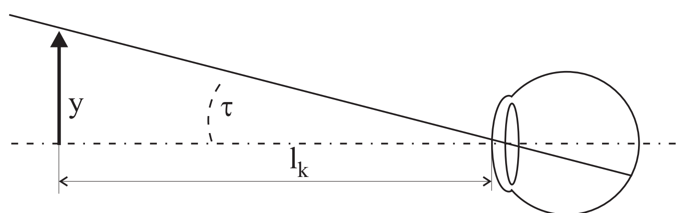
Obrázok 17.7: Zobrazovanie pomocou rozptylky.

17.6 Základné optické prístroje

Ľudské oko a videnie

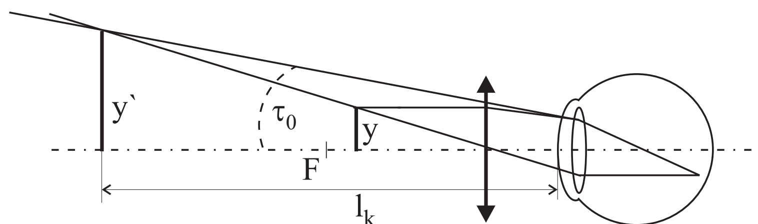
Teraz sa budeme zaoberať okom nie z biologického, ale z fyzikálneho hľadiska. Oko je vynikajúci optický prístroj, ktorý pomocou očnej šošovky vytvára na citlivej sietnici zmenšený, skutočný a prevrátený obraz. Pomocou očného nervu sa tieto informácie prenášajú do mozgu, kde však skúsenosťou získanou skoro po narodení vnímame obraz ako priamy (neprevrátený).

Očná šošovka je dvojvypuklá spojná sústava a jej vzdialenosť od sietnice je stála. Na rôzne vzdialené predmety sa zaostruje zmenou jej optickej mohutnosti, čo nazývame **akomodácia oka.** Akomodačná schopnosť zdravého oka má isté hranice. Najbližší bod, ktorý sa ostro zobrazí na sietnici, voláme **blízky bod** a najvzdialenejší bod, ktorý sa ostro zobrazí na sietnici, voláme **ďaleký bod.** Vzdialenosť, z ktorej môžeme predmety dlhodobo pozorovať bez väčšej únavy je $250\,mm$ a nazývame ju **konvenčná vzdialenosť** – l_k. Množstvo svetla, ktoré dopadá na sietnicu reguluje **dúhovka,** ktorá slúži ako clona a plynulo sa mení podľa intenzity dopadajúceho svetla. Zadná stena oka je bohato zásobená živinami z krvných vlásočníc a je pokrytá sietnicou. Na sietnici sa nachádzajú bunky citlivé na svetlo – **tyčinky** (rozlišujú intenzitu svetla) a **čapíky** (rozlišujú farby). Veľkosť obrazu na sietnici závisí od veľkosti zorného uhla τ, ktorý zvierajú svetelné lúče prechádzajúce optickým stredom šošovky a okrajmi predmetu (obr. 17.8).



Obrázok 17.8: Pozorovanie pomocou oka.

Keďže zrakový vnem oka sa zachováva asi $0,1\,s$, človek vníma deje okolo seba ako plynulý dej. Táto vlastnosť sa nazýva **zotrvačnosť oka** a je využitá pri premietaní v kine a v televízii. Ak je tvar oka zmenený, nevytvorí sa ostrý obraz na sietnici, ale napríklad pred sietnicou. Hovoríme, že oko je **krátkozraké.** Aby takéto oko videlo ostro aj vzdialené predmety, treba zmenšiť jeho optickú mohutnosť, čo sa dá dosiahnuť vhodnou rozptylkou. Ak sa ostrý obraz predmetov vytvára za sietnicou, oko je **ďalekozraké.** Optická mohutnosť takéhoto oka je malá a jej zväčšenie dosiahneme spojnou šošovkou (spojkou).



Obrázok 17.9: Zväčšenie pomocou lupy.

Lupa

Veľkosť obrazu predmetu na sietnici oka je určený zorným uhlom (τ, obr. 17.8), pod ktorým vidíme predmet. Priblížením pozorovaného predmetu k oku zväčšujeme i tento uhol, čím dosahujeme lepšie pozorovateľné detaily. Zo skúsenosti vieme, že oko je najmenej namáhané ak je predmet v **konvenčnej vzdialenosti** - $l_k = 25\,cm$. Ak zmenšujeme vzdialenosť oko - predmet, dosiahneme blízkeho bodu a v tomto prípade je maximálne rozlíšenie. Ak predmet ďalej približujeme k oku, zväčšuje sa zorný uhol, ale predmet sa stáva neostrý, lebo oko už nie je schopné akomodovať sa.

Lepšie rozlíšenie detailov predmetu dosiahneme pomocou lupy. **Lupa** je spojná šošovka s ohniskovou vzdialenosťou menšou ako je konvenčná vzdia-

lenosť. Vhodnou polohou šošovky a predmetu dosiahneme (obr. 17.9), že šošovka vytvorí neskutočný obraz vo vzdialenosti, v ktorej je oko schopné vytvoriť ostrý obraz. V prípade, že predmet pozorujeme v konvenčnej vzdialenosti pod zorným uhlom ($< 60''$), oko už ho nerozlišuje. Ak ho však umiestnime pred spojnú šošovku (obr. 17.9), ktorá zobrazí pozorovaný predmet do konvenčnej vzdialenosti, zväčší sa zorný uhol z τ (obr. 17.8) na τ_0, pod ktorým pozorujeme daný predmet. Výpočtom dostaneme, že vzťah pre zväčšenie lupy je

$$Z = \frac{l_k}{f}. \tag{17.8}$$

Praktické použitie zväčšenia zorného uhla je obmedzené chybami, ktoré pri zobrazovaní vznikajú. Jednoduchá šošovka je použiteľná do šesťnásobného zväčšenia.

Mikroskop

Väčšie zväčšenie a možnosť pozorovania veľmi drobných predmetov možno dosiahnuť viacerými šošovkami, ktoré majú spoločný názov **mikroskop**. Skladá sa z dvoch priestorovo od seba oddelených spojných systémov, z **objektívu** (časť na strane predmetu) a **okuláru** (na strane oka). V najjednoduchšom prípade sú obe šošovky spojky a sú usporiadané tak, aby ich optická os bola spoločná. Predmet sa umiestňuje pred objektív, ktorý vytvára jeho reálny obraz v ohniskovej rovine okuláru. Tento obraz sa okulárom pozoruje ako lupou.

Ďalekohľad

Ďalekohľad je optický prístroj na pozorovanie vzdialených predmetov, ktorých zorný uhol je malý. Delíme ich na dva základné typy: **refraktory** a **reflektory**. Pri refraktore objektívom je aspoň jedna spojná šošovka, ktorú pri reflektore nahradzuje duté zrkadlo. Obraz vytvorený objektívom v jeho ohniskovej rovine pozorujeme okulárom ako lupou. Predmetová rovina okuláru splýva pritom s obrazovou ohniskovou rovinou objektívu. Najčastejšie použitie ďalekohľadov je v astronómii, v armáde, pri turistike, v námornej doprave a podobne.

Literatúra

[1] Čičmanec P.: *Všeobecná fyzika 2 - Elektrina a magnetizmus*. Alfa Bratislava, 1980, ISBN 80-05-01089-3.

[2] Feynman, P., Leighton, B., Sands, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*. Fragment 2000, ISBN 80-7200-405-0.

[3] Feynman, P., Leighton, B., Sands, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Fragment 2001, ISBN 80-7200-420-4.

[4] Ftojrek A.: *Bakalářská fyzika pro HGF*. VŠB - Technická univerzita Ostrava, Ostrava 2005, ISBN 80-248-0950-8.

[5] Gajtanska, M. – Danihelová, A. – Němec, M.: *Fyzika*. Zvolen: Vydavateľstvo TU 2005, ISBN 80-228-1492-X.

[6] Hajko V., Daniel-Szabó J.: *Základy fyziky*. VEDA, Bratislava 1980.

[7] Halliday D., Resnik R., Walker J.: *Fyzika*. VUTIUM a PROMETES 2000.

[8] Horák, Z., Krupka, F., Šindelár, V.: *Technická fysika*. SNTL, Praha 1961.

[9] Horák Z., Krupka F.: *Fyzika*. SNTL/ALFA, Praha 1976.

[10] Ilkovič D.: *Fyzika*. SNTL, Bratislava 1957.

[11] Krempaský J.: *Fyzika I*. Bratislava 1978.

[12] Krišťák Ľ. - Němec, M.: *Inovácia fyzikálneho vzdelávania na technickej univerzite vo Zvolene*. Zvolen: Vydavateľstvo TU 2011, ISBN 978-80-228-2218-3.

[13] Kvasnica, J.: *Matematický aparát fyziky.* Academia, Praha 1997, ISBN 80-200-0088-7.

[14] Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: *Mechanika.* Academia, Praha 2004 ISBN 80-200-1268-0.

[15] Kopečný, J.: *FYZIKA II a Elektromagnetické pole.* VŠB - Technická univerzita Ostrava, Ostrava 2000, ISBN 80-7078-785-6.

[16] Lepil, O. a kolektív: *FYZIKA pre 3. ročník gymnázia.* SPN, Bratislava 1986.

[17] Pudiš, D. a kolektív: *Vybrané kapitoly z FYZIKY.* EDIS-Žilinská univerzita, Žilina 2007, ISBN 978-80-8070-653-1.

[18] Slavík, J. B. a kolektív: *Základy fyziky I..* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1962.

[19] Štrba, A.: *Všeobecná fyzika 3 OPTIKA.* Alfa & STNL 1979.

[20] Teplička, I.: *Fyzika.* Enigma, Nitra 1998, ISBN 80-85471-58-2.

[21] Urgošík, B.: *Fyzika.* SNTL, Praha 1981.

[22] Vachek, J. a kolektív: *FYZIKA pre 1. ročník gymnázia.* SPN, Bratislava 1984.

[23] Veis, Š., Maďar, J., Martišovič, V.: *Všeobecná fyzika 1 - Mechanika a molekulová fyzika.* Alfa, Bratislava 1981.

[24] *STN ISO 31-0 (01 1301) Veličiny a jednotky 0. časť: Všeobecné zásady.* Slovenský úrad technickej normalizácie, Bratislava 1997.

[25] *STN ISO 31-1 (01 1301) Veličiny a jednotky 1. časť: Priestor a čas.* Slovenský úrad technickej normalizácie, Bratislava 1997.

[26] *STN ISO 31-2 (01 1301) Veličiny a jednotky 2. časť: Periodické a príbuzné javy.* Slovenský úrad technickej normalizácie, Bratislava 1997.

[27] *STN ISO 31-1 (01 1301) Veličiny a jednotky 3. časť: Mechanika.* Slovenský úrad technickej normalizácie, Bratislava, 1997.

[28] *STN ISO 31-11 (01 1301) Veličiny a jednotky 11. časť: Matematické značky používané vo fyzikálnych vedách a technike.* Slovenský úrad technickej normalizácie, Bratislava 1998.

[29] http://www.converter.cz/jednotky.htm

[30] http://www.bipm.org/en/si/si_brochure/chapter4/table7.html

[31] http://kf-lin.elf.stuba.sk/ ballo/fyzika/fyzika.html

[32] http://hockicko.uniza.sk/

[33] http://fyzika.uniza.sk/praktika

[34] http://www.cabrillo.edu/ dbrown/tracker/

Register

Archimedes, 140
Avogadro L., 173
Bernoulli D., 183
Biot J.B., 239
Boltzmann L., 173
Brahe T., 90
Brown R., 171
Celsius A., 174
Clausius R.E., 183
Fahrenheit D.G., 174
Coulomb Ch., 195
Faraday M., 251
Galileo G., 99
Gauss K.F, 199
Gilbert W., 193
Hertz, H., 150
Hooke R., 129
Huygens, Ch., 259
Joule J.P., 68
Kepler J., 90
Kopernik M., 89
Lenz E. Ch., 254
Maxwell J.C., 232
Newton, I., 63
Ohm G.S., 223
Orsted H.Ch., 232
Pascal B., 128
Poisson S.D., 191
Savart F., 239
Stokes, J., 147
Volt A., 205
Waals J.D., 192
Watt, J., 71
Young T., 130

I. impulzová veta, 112
I. Kirchhoffov zákon, 224
I. kozmická rýchlosť, 102
I. Newtonov pohybový zákon, 63
I. termodynamický zákon, 186
ideálny plyn, 181
II. impulzová veta, 113
II. Kirchhoffov zákon, 225
II. kozmická rýchlosť, 103
II. Newtonov pohybový zákon, 64, 65, 91, 92, 105, 110, 142, 196, 207, 221
II. termodynamický zákon, 187
III. Newtonov pohybový zákon, 66, 91, 112

adiabata, 191
adiabatický dej, 190
ampér, 220, 243
Ampérov zákon, 240
Ampérova sila, 236
amplitúda kmitov, 153

Archimedov zákon, 140
atómová polarizácia, 214
atmosférický tlak, 139, 144
Avogadrova konštanta, 173

Bernoulliho rovnica, 143
Blochova stena, 249
Bohrov magnetón, 245
Boylov-Mariottov zákon, 188

coluomb, 194
Coulombov zákon, 195, 202

deformácia, 127, 132, 134, 135, 150
diamagnetické látky, 247
doskový kondenzátora, 210, 211, 217
dráha, 32
driftová rýchlosť, 220
dvojica síl, 206, 238
dynamická viskozita, 147

ekvipartičná́ teorém, 183
elektrická sila, 196, 219
elektrická susceptibilita, 217
elektrická vodivosť, 222
elektrické napätie, 204, 212, 213, 222, 229
elektrický dipól, 214, 239
elektrický náboj, 193
elektrický potenciál, 202
elektrický prúd, 220, 222, 227, 236, 238, 241, 255
elektromotorické napätie, 253
energia, 72, 174, 185, 211, 256
energia nabitého kondenzátora, 212, 256

fázová konštanta, 121, 122, 153
feromagnetické látky, 244
feromagnetické látky, 249
frekvencia, 57, 150
frekvencia netlmených kmitov, 154
fyzikálne kyvadlo, 120

Gaussova veta, 217, 240
gradient potenciálu, 95
gravitóny, 89
guľové zrkadlo, 265

harmonický oscilátor, 149
hertz, 57
hmotný bod, 29, 30, 63, 72, 92, 106, 111, 121
hmotným stred telesa, 106
hustota elektrického prúdu, 221
hustotu energie elektrického poľa, 218
hustotu energie magnetického poľa, 257
Huygensov princíp, 259
hybnosť, 65, 112
hydrostatický tlak, 139

impulz sily, 64
index lomu, 259
inerciálna vzťažná sústava, 62
intenzita elektrického poľa, 196, 201, 205, 208, 222
intenzita gravitačného poľa, 92, 196
izobarický dej, 190
izochora, 189
izochorický dej, 189
izolované teleso, 61
izoterma, 188
izotermický dej, 188

jednotkový vektor, 24
Joule, 183
Joule-Lenzov zákon, 231

kalorimeter, 178
kalorimetrická rovnica, 178
kapacita kondenzátora, 209, 210, 213, 216
Keplerove zákony, 90, 91
kinematická viskozita, 145
kinematika, 29
kinetická energia, 72, 103, 114, 116, 142, 158, 185
kmit, 150
kmitanie, 149
koeficient dynamického šmykového trenia, 81
koeficient statického šmykového trenia, 81
koeficient valivého trenia, 87
kondenzátor, 209, 213
konzervatívna sila, 70, 75, 77, 158, 202
kyv, 150
kyvadlo, 150

látkové množstvo, 173
Lenzovo zákon, 254
Lissajousove krivky, 170
Lorentzova sila, 235

magnetická indukcia, 233, 234
magnetická polarizácia, 247
magnetická sila, 235
magnetická susceptibilita, 247
magnetický dipól, 239, 248
magnetický indukčný tok, 252
magnetický moment, 239, 245
matematické kyvadlo, 121
Mayerova rovnica, 190
mechanická energia, 74, 77, 112, 158, 159
medzný uhol, 262
merná tepelná kapacita, 177, 178
merný odpor, 223
molárna hmotnosť, 173
moment hybnosti, 65, 113, 120
moment sily, 65, 111, 113, 119, 206, 238, 239
moment zotrvačnosti, 115

násobenie vektora, 24
neferomagnetické látky, 244
neinerciálna vzťažná sústava, 62
nerovnomerný pohyb, 35
Newtonov gravitačný zákon, 91, 96, 102, 202
normálové zrýchlenie, 58

odpor, 223, 228
odstredivá sila, 96, 101, 235
Ohmov zákon, 223
Ohmov zákon pre uzavretý obvod, 230
ohnisková vzdialenosť, 265
okamžitá rýchlosť, 36
okamžité zrýchlenie, 39
optická mohutnosť šošovky, 266
orbitálový magnetický moment, 245

paramagnetické látky, 248
pascal, 128, 138
Pascalov zákon, 138
perióda, 57, 150

perióda kmitov kyvadla, 121
periodický pohyb, 149
permeability vákua, 240
permeabilita vákua, 246
plynová konštanta, 173
pohybová rovnica, 119
Poissonov zákon, 191
Poissonova konštanta, 191
polarizácia dielektrika, 215
polohový vektor, 31
polohový vektor ťažiska, 108, 109
potenciál gravitačného poľa, 94, 95
potenciálna energia, 74, 93, 94, 142, 185, 245
práca, 68, 103, 118, 143, 184, 202, 211, 230, 257
priemerná rýchlosť, 35
princíp invariantnosti, 62
pružinový oscilátor, 150

relatívna atómová hmotnosť , 172
relatívna permeabilita, 247
relatívna permitivita, 214
Reynoldsovo číslo, 146
rezonancia, 165
rotačná energia, 115
rotačný pohyb, 49, 105, 106, 116
rovnica spojitosti, 142
rovnomerný pohyb, 34, 97
rovnomerne zrýchlený pohyb, 40, 97
rozdiel vektorov, 23

súčet vektorov, 22
súradnicová sústava, 29
siločiara, 93, 197, 202, 204, 208, 233
šikmý vrh, 100
skalár, 21
skalárny súčin, 25
Snellov zákon, 262
spinový magnetický moment, 245
spomalený pohyb, 35
stavová rovnica ideálneho plynu, 184
Steinerova veta, 117
Stokesov vzorec, 147
svetelný lúč, 260

tangenciálne zrýchlenie, 58
ťažisko, 106
tepelná kapacita, 177, 178, 183, 190
teplotný súčiniteľ odporu, 228
tiažová sila, 63, 73, 96, 97, 106, 120, 139, 151
tiažové zrýchlenie, 96
tlak, 137
tlaková sila, 138
tok intenzity elektrického poľa, 198, 252
Torricelliho vzorec, 144
torzné kyvadlo, 121
trajektória, 30
trecia sila, 80, 123, 159
tuhosť pružiny, 151

uhlová frekvencia, 153
uhlová rýchlosť, 49, 51, 84, 85, 96, 114
uhlové zrýchlenie, 49, 114

výkon, 71, 230, 257
Van der Waalsova stavová rovnica, 192
veľkosť posunutia, 22
vektor, 21

vektor polarizácie, 215
vektorový súčin, 26
viazané náboje, 215
vlastná indukcia, 255
vnútorná energia, 185, 186, 188–190
vnútorný odpor zdroja, 229
voľný pád, 98
vodorovný vrh, 100
vrh zvislý nahor, 99
vynútené kmity, 164
vzťažná sústava, 29
vztlaková sila, 140, 146

zákon akcie a reakcie, 67, 91
zákon zachovania mechanickej energie, 75
zdroj elektromotorického napätia, 229
zobrazovacia rovnica tenkej šošovky, 266
zrýchlený pohyb, 35
zrýchlenie, 39–41, 47, 49, 60, 72, 80, 91, 92, 110, 125, 152, 154, 197

RNDr. Jozef Kúdelčík, PhD. – PaedDr. Peter Hockicko, PhD.

ZÁKLADY FYZIKY

Vydala Žilinská Univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
v edičnom rade VYSOKOŠKOLSKÉ UČEBNICE

Vedecký redaktor prof. RNDr. Peter Bury, CSc.
Zodp. red. PhDr. Katarína Šimánková
Tech. red. Juraj Zbýňovec
Návrh obálky PeadDr. Peter Hockicko, PhD.
Graf. úprava obálky Miroslav Pfliegel, ml.

Vytlačilo EDIS - vydavateľstvo Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, HB, Žilina
v apríli 2011 ako svoju 3018. publikáciu
272 strán, 108 obrázkov, 9 tabuliek, AH 17,50, VH 18,34
prvé vydanie, náklad 100 výtlačkov
ISBN 978-80-554-0341-0